Pure and Applied Mathematics Quarterly
Volume 7, Number 3
(*Special Issue: In honor of
Jacques Tits*)
859—921, 2011

Masures Affines

Guy Rousseau

À Jacques Tits, pour son anniversaire, cet article qui lui doit tant.

Abstract: We give an abstract definition of affine hovel which generalizes the definition of affine buildings (eventually non simplicial) given by Jacques Tits and includes the hovels built by Stéphane Gaussent and the author for some Kac-Moody groups over ultrametric fields. We prove that, in such an affine hovel $\mathcal{I}$, there exist retractions with center a sector germ and that we can add at the infinity of $\mathcal{I}$ a pair of twin buildings or two microaffine buildings. For some affine hovels $\mathcal{I}$, we prove that the residue at a point of $\mathcal{I}$ has a natural structure of pair of twin buildings and that there exists on $\mathcal{I}$ a preorder which induces on each apartment the preorder associated to the Tits cone.

Résumé: On donne une définition abstraite de masure affine qui généralise celle d'immeuble affine (éventuellement non simplicial) donnée par Jacques Tits et qui inclut les masures (hovels) construits par Stéphane Gaussent et l'auteur pour certains groupes de Kac-Moody sur des corps ultramétriques. On montre que, dans une telle masure affine, il existe des rétractions de centre un germe de quartier et qu'à l'infini on peut construire une paire d'immeubles jumelés et deux immeubles microaffines. Pour certaines masures affines $\mathcal{I}$, on montre que le résidu en chaque point de $\mathcal{I}$ a une structure naturelle de paire d'immeubles jumelés et qu'il existe sur $\mathcal{I}$ un préordre qui induit sur chaque appartement le préordre associé au cône de Tits.

Keywords: Immeuble affine, Masure affine, Kac-Moody

Received December 16, 2008.

Introduction

Si G est un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps ultramétrique, Stéphane Gaussent et l'auteur ont introduit un espace $\mathcal{I}$ sur lequel le groupe $G(K)$ agit [13] ; il y a en fait (dans cette référence) des conditions techniques restrictives sur G et K, voir § 6 ci-dessous. La construction est calquée, d'aussi près que possible, sur celle des immeubles de Bruhat-Tits pour les groupes réductifs sur les corps locaux [7]. Cette généralisation au cas Kac-Moody pose un certain nombre de problèmes techniques et révèle une difficulté majeure: cet espace $\mathcal{I}$ est réunion d'appartements, mais l'axiome fondamental des systèmes d'appartements n'est pas vérifié: il peut exister deux points de $\mathcal{I}$ qui ne sont pas dans un même appartement. À cause de cette mauvaise propriété, $\mathcal{I}$ s'est vu attribuer le nom de masure (hovel).

Par ailleurs Jacques Tits a donné dans [33] une définition abstraite des immeubles affines (éventuellement non discrets) sans supposer cet axiome fondamental des systèmes d'appartements (ce qui est par contre le cas de la définition de l'auteur dans [29]). L'un de ses axiomes essentiels est l'existence d'un appartement contenant n'importe quelle paire de germes de quartier. Comme cette propriété et d'autres analogues sont vérifiées par les masures de [13], il est naturel d'envisager la généralisation de la définition de Tits aux masures affines [*l.c.* ; remark 4.6].

On va donc, dans cet article, essayer de généraliser l'essentiel des résultats de [33] dans un cadre incluant les masures déjà construites. On introduit donc une définition abstraite de masure affine en imposant comme axiomes un certain nombre de propriétés de ces masures concrètes, choisies comme de bonnes généralisations des axiomes de [33], *cf.* 2.5.

On introduit d'abord au § 1 l'appartement affine témoin $\mathbb{A}$ de la masure affine. On part, essentiellement, de la représentation géométrique classique d'un groupe de Coxeter (éventuellement infini) W^v dans un espace vectoriel réel V de dimension finie (mais pas forcément euclidien) [4 ; V § 4]. Les générateurs fondamentaux de W^v sont des réflexions linéaires par rapport aux murs d'un cône convexe, ouvert et simplicial C^v_f (la chambre vectorielle fondamentale positive). Les conjugués par W^v de ces murs sont les murs vectoriels, leur ensemble est noté $\mathcal{M}^v$; à chaque $M^v \in \mathcal{M}^v$ est associée une unique réflexion $r_{M^v} \in W^v$ d'hyperplan

M^v. Les conjugués par W^v de C_f^v (ou de ses facettes) sont les chambres (ou les facettes) vectorielles positives. La réunion (disjointe) de toutes ces facettes est le cône de Tits $\mathcal{T}$ qui est convexe. Les chambres ou facettes négatives sont les images par $-Id_V$ des chambres ou facettes positives. De plus on est souvent obligé de considérer des murs vectoriels “imaginaires” dont l'ensemble est stable par W^v, *cf.* 1.1.5.

L'appartement $\mathbb{A}$ est un espace affine sous V, il est muni d'un ensemble $\mathcal{M}$ d'hyperplans affines appelés murs. Si $M \in \mathcal{M}$, sa direction M^v est dans $\mathcal{M}^v$ et on note r_M la réflexion d'hyperplan M dont l'application linéaire associée est r_{M^v}. Le groupe de Weyl W, engendré par les r_M pour $M \in \mathcal{M}$, doit stabiliser $\mathcal{M}$. Les murs imaginaires sont les hyperplans de direction un mur vectoriel imaginaire. Comme l'ensemble des murs n'est pas localement fini, on ne peut pas définir des facettes dans $\mathbb{A}$ comme des sous-ensembles de $\mathbb{A}$: ce sont des filtres de parties de $\mathbb{A}$ comme dans [7], *cf.* 1.7. Un quartier (resp. une face de quartier) de $\mathbb{A}$ est une partie de $\mathbb{A}$ de la forme $\mathfrak{f} = x + F^v$ pour $x \in \mathbb{A}$ et F^v une chambre (resp. une facette) vectorielle. On a besoin d'épaissir ces faces de quartier: une cheminée est un ensemble de la forme $\mathfrak{r} = F + \overline{F^v}$ (ou plus précisément son enclos *cf.* 1.10) où F est une facette et F^v une facette vectorielle. La face de quartier $x + F^v$ (resp. la cheminée $cl(F + \overline{F^v})$) est dite sphérique (resp. évasée) si F^v est sphérique *i.e.* contenue dans l'intérieur de $\pm\mathcal{T}$. Le germe d'une face de quartier $x + F^v$ (resp. d'une cheminée $cl(F + \overline{F^v})$) est le filtre des parties de $\mathbb{A}$ contenant $x + F^v + \xi$ (resp. $cl(F + \overline{F^v} + \xi)$) pour un certain $\xi \in \overline{F^v}$.

Après ces définitions techniques, on définit au § 2 une masure affine comme un ensemble $\mathcal{I}$ muni d'un recouvrement par un ensemble $\mathcal{A}$ d'appartements, tous isomorphes à $\mathbb{A}$. On peut résumer l'essentiel des axiomes en disant que l'on demande de plus qu'une facette, une facette et un germe de cheminée évasée ou deux germes de cheminées évasées sont contenus dans un même appartement, unique à isomorphisme fixant ces objets près (2.1). Les immeubles de Bruhat-Tits, les immeubles affines simpliciaux (au sens classique, voir par exemple [6]) et vraisemblablement tous les immeubles affines de [33] sont des masures affines (2.4). On déduit aussitôt de la définition l'existence dans une masure affine de rétractions de centre un germe de quartier (2.6).

Au § 3 on commence l'étude des propriétés à l'infini d'une masure affine. Deux germes de faces de quartier sphériques sont dits parallèles si, dans un appartement les contenant tous deux, ils correspondent à la même facette vectorielle. On montre que ceci définit une relation d'équivalence (3.2) et que les classes d'équivalences constituent les facettes sphériques de deux immeubles jumelés (théorèmes 3.4 et 3.7). On obtient ainsi, à l'infini d'une masure affine, une paire d'immeubles jumelés qui généralise donc l'immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine construit dans [33].

Au § 4 on examine la structure de l'ensemble des germes de faces de quartier sphériques positives (resp. négatives). On montre que cela constitue un immeuble microaffine au sens de [28] ; les facettes de cet immeuble microaffine correspondent aux germes de cheminées évasées positives (resp. négatives) *cf.* 4.4. Les germes de faces de quartier sphériques dans une même classe de parallélisme constituent un immeuble affine (4.3). Dans le cas des cloisons de quartier, on obtient ainsi des arbres qui généralisent ceux utilisés par J. Tits dans [33] pour définir une valuation sur la donnée radicielle associée (en général) à l'immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine. On n'arrive cependant pas ici à une classification des masures affines (qui généraliserait [33]) pour (au moins) deux raisons: la classification des immeubles jumelés n'est pas aussi générale que celle des immeubles sphériques et surtout on ne sait pas toujours construire une masure affine associée à une donnée radicielle valuée correspondant à un système de racines infini (4.12).

Au § 5 on s'intéresse aux propriétés à distance finie d'une masure $\mathcal{I}$. On montre (5.3) qu'en chaque point de $\mathcal{I}$ il existe un résidu sous la forme de deux immeubles. Si la masure $\mathcal{I}$ est "ordonnée" (2.3), ces deux immeubles sont en fait jumelés (5.6). On a donc encore une paire d'immeubles jumelés qui généralise l'immeuble sphérique qu'est le résidu pour un immeuble affine. Dans l'appartement $\mathbb{A}$ il y a un préordre naturel donné par : $x \leq y$ si et seulement si $y-x \in \mathcal{T}$. On définit une relation dans $\mathcal{I}$ par $x \leq y$ si et seulement si il existe un appartement A contenant x et y et si $x \leq y$ dans cet appartement. On montre que cette relation est bien définie et que c'est un préordre si la masure est ordonnée (théorème 5.9). Dans le cas des immeubles affines cette relation est triviale (car $\mathcal{T} = V$) ; ce n'est pas le cas en général et on a donc ainsi une structure d'un type nouveau sur les masures affines.

Enfin au § 6 on exhibe des exemples de masures affines qui ne sont pas des immeubles affines, en montrant que (presque toutes) les masures de [13] sont des masures affines, ordonnées, épaisses et semi-discrètes (théorème 6.11).

1. **Appartements affines**

Dans ce premier paragraphe on laisse beaucoup de démonstrations au lecteur. Sauf indication particulière, ce sont de simples conséquences de l'algèbre linéaire et de la théorie des inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^n$.

1.1. Le groupe de Weyl vectoriel et les racines

Dans tout cet article on se donne un quadruplet $(V, W^v, (\alpha_i)_{i\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$ formé d'un espace vectoriel réel V de dimension finie, d'un sous-groupe W^v de $GL(V)$, d'une famille $(\alpha_i^\vee)_{i\in I}$ dans V et d'une famille libre $(\alpha_i)_{i\in I}$ dans le dual V^* de V (toutes deux indexées par le même ensemble fini I). On suppose vérifiées les propriétés suivantes:

1) Pour $i \in I$, $\alpha_i(\alpha_i^\vee) = 2$ et donc la formule $r_i(v) = v - \alpha_i(v)\alpha_i^\vee$ définit une involution de V , plus précisément une réflexion d'hyperplan $Ker(\alpha_i)$.

2) Le groupe de Weyl W^v est le sous-groupe de $GL(V)$ de système générateur $S = \{r_i \mid i \in I\}$. C'est un groupe de Coxeter, appelé *groupe de Weyl vectoriel*. Le coefficient $m(i, j)$ de la matrice de Coxeter est l'ordre de r_ir_j.

3) On note Φ l'ensemble des *racines* réelles c'est à dire des formes linéaires sur V de la forme $\alpha = w(\alpha_i)$ avec $w \in W^v$ et $i \in I$. Si $\alpha \in \Phi$, alors $r_\alpha = w.r_i.w^{-1}$ est bien déterminé par α, indépendamment du choix de w et de i tels que $\alpha = w(\alpha_i)$. Pour $v \in V$ on a $r_\alpha(v) = v - \alpha(v)\alpha^\vee$ pour un $\alpha^\vee \in V$ avec $\alpha(\alpha^\vee) = 2$; ainsi r_α est une réflexion par rapport à l'hyperplan $M^v(\alpha) = Ker(\alpha)$ que l'on appelle *mur (vectoriel)* de α. On note $\mathcal{M}^v$ l'ensemble de ces murs vectoriels (réels). Le *demi-appartement vectoriel* associé à α est $D(\alpha) = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}$.

4) Si $\Phi^+ = \Phi \cap (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}^+\alpha_i)$ et $\Phi^- = -\Phi^+$, on a $\Phi = \Phi^+ \bigsqcup \Phi^-$. Le groupe W^v permute Φ, mais seul l'élément neutre stabilise Φ^+. Plus précisément pour $w \in W^v$, $w(\alpha_i) \in \Phi^+ \Leftrightarrow \ell(wr_i) > \ell(w)$ où ℓ désigne la longueur dans W^v relative à S. Les racines de Φ^+ (resp. Φ^-) sont dites *positives* (resp. *négatives*). Pour $\alpha \in \Phi$, on a $\Phi \cap \mathbb{R}^+\alpha = \{\alpha\}$; ainsi Φ^+ (resp. Φ) est en bijection avec $\mathcal{M}^v$ (resp. les demi-appartements de V).

5) On considère un ensemble $\Delta_{im} \subset V^*$ de racines imaginaires disjoint de $\mathbb{R}\Phi$ et stable par $\pm W^v$; on note $\Delta_{re} = \Phi$ et $\Delta = \Phi \cup \Delta_{im}$. Trois cas particuliers sont particulièrement intéressants:

• Cas sans imaginaire: $\Delta_{im} = \emptyset$; c'est un cas particulier du cas suivant.

• Cas modérément imaginaire: Si $\Delta^+_{im} = \Delta_{im} \cap (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}^+\alpha_i)$ et $\Delta^-_{im} = -\Delta^+_{im}$, on a $\Delta_{im} = \Delta^+_{im} \cup \Delta^-_{im}$ et Δ^+_{im} comme Δ^-_{im} sont stables par W^v. On peut par exemple prendre $\Delta^+_{im} = \cap_{w\in W^v} (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}^+\alpha_i) \setminus \mathbb{R}\Phi$.

• Cas très imaginaire: $\mathbb{R}^*\Delta_{im} = V^* \setminus \mathbb{R}\Phi$, par exemple $\Delta_{im} = V^* \setminus \mathbb{R}\Phi$.

On note $\mathcal{M}^{vi}$ l'ensemble des *murs vectoriels imaginaires* $M^v(\alpha) =$Ker(α), pour $\alpha \in \Delta_{im}$.

1.2. Exemples

La situation décrite ci-dessus se rencontre dans (au moins) deux cas (non disjoints):

1) *Cas Kac-Moody*: *cf.* [16] ou [28].

On considère une réalisation $(V, (\alpha_i)_{i\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$ d'une matrice de Kac-Moody A (cela signifie que $\alpha_j(\alpha_i^\vee)$ est le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A [16]) avec $(\alpha_i)_{i\in I}$ libre dans V^*. Alors W^v en est le groupe de Weyl, Φ l'ensemble des racines réelles et Δ_{im} l'ensemble des racines imaginaires ; on est dans le cas modérément imaginaire. De manière équivalente on peut considérer un système générateur de racines $(A, X, Y, (\alpha_i)_{i\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$ au sens de [3] avec $V = Y \otimes \mathbb{R}$ comme dans [28]. Ce cas existe si et seulement si les coefficients de la matrice de Coxeter de W^v sont 1, 2, 3, 4, 6 ou ∞. De plus on a $\Delta \subset \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$.

Si W^v est fini, la matrice de Kac-Moody est une matrice de Cartan et (V, Φ, W^v) est associé à une algèbre de Lie réductive complexe, ce cas sera dit *classique*. Si A est une matrice de Kac-Moody de type affine [16 ; IV], on parlera de cas *affine*.

On peut modifier ce cas Kac-Moody en se plaçant dans les cas sans imaginaire ou très imaginaire.

2) *Cas Coxeter général*:

cf. [4 ; V § 4], [10], [15 ; V] ou [35].

On considère un groupe de Coxeter quelconque W^v de système fondamental de générateurs $S = \{s_i \mid i \in I\}$ fini et matrice de Coxeter $(m(i,j))_{i,j\in I}$. On lui associe un espace vectoriel réel V^* de base $(\alpha_i)_{i\in I}$, que l'on munit de la forme bilinéaire symétrique B, telle que $B(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ et $B(\alpha_i, \alpha_j) = -cos(\frac{\pi}{m(i,j)})$. On définit alors $\alpha_i^\vee \in V$ par $2B(f,\alpha_i) = f(\alpha_i^\vee)$ pour tout $f \in V^*$. D'après les références ci-dessus les propriétés de 1.1 sont vérifiées. Pour les racines imaginaires, on peut envisager les 3 cas de 1.1.5.

Bien sûr on peut aussi multiplier V par un espace vectoriel sur lequel W^v n'agit pas.

3) Remarques: On pourrait sans doute abandonner dans les hypothèses de 1.1 les conditions de liberté de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ et de finitude de I ou de la dimension de V. Il faudrait prendre quelques précautions supplémentaires, par exemple imposer que C_f^v (défini ci-dessous en 1.3) engendre l'espace vectoriel V. Des exemples de cette situation et leur intérêt sont expliqués dans [19] et [3].

Même sans abandonner ces deux conditions, les systèmes générateurs de racines plus généraux de [3] fournissent des exemples différents de ceux de 1), ni modérément imaginaires, ni sans imaginaires, ni très imaginaires.

Dans la suite on s'intéresse essentiellement au cas modérément imaginaire (sans l'imposer). Le cas sans imaginaire est idéal mais souvent semblable, *cf.* 1.8.3.

1.3. Le cône de Tits

Les résultats de ce numéro se démontrent comme dans [4 ; V § 4] ou [15 ; V] à partir des hypothèses de 1.1.

La *chambre fondamentale positive* $C_f^v = \{v \in V \mid \alpha_i(v) > 0 \quad \forall i \in I\}$ est un cône convexe ouvert non vide. Son adhérence est réunion disjointe des *facettes vectorielles* $F^v(J) = \{\ v \in V \mid \alpha_i(v) = 0\ \forall i \in J;\ \alpha_i(v) > 0\ \forall i \notin J\}$ pour $J \subset I$. On a $C_f^v = F^v(\emptyset)$ et $V_0 = F^v(I)$ est un sous-espace vectoriel. Si $V_0 = \{0\}$, on dit que W^v est *essentiel*.

On dit que la facette $F^v(J)$ ou que J est *sphérique* si $W^v(J) = \langle r_i \mid i \in J\rangle$ est fini ; c'est le cas de la chambre C_f^v ou des *cloisons* $F^v(\{i\})$, $\forall i \in I$. Plus généralement les *chambres* (resp. *facettes, facettes sphériques, cloisons*) positives sont les transformées par W^v de celles déjà définies. Le *type* de $w.F^v(J)$ est J.

On dit que l'on est dans le cas *fini* si (de manière équivalente) Φ est fini, W^v est fini ou I (et donc toute facette) est sphérique.

Le *cône de Tits* est la réunion disjointe $\mathcal{T}$ des facettes $w.F^v(J)$ pour w dans W^v et $J \subset I$. C'est un cône convexe stable par W^v . L'action de W^v sur les chambres est simplement transitive. Le fixateur ou le stabilisateur de $F^v(J)$ est $W^v(J)$. Pour x dans $\mathcal{T}$, on note $F^v(x)$ la facette qui le contient. Celle-ci est sphérique si et seulement si x est intérieur à $\mathcal{T}$: la réunion des facettes sphériques est l'intérieur $\mathcal{T}^\circ$ de $\mathcal{T}$, c'est un cône convexe ouvert non vide, appelé *cône de Tits ouvert*. De même l'adhérence $\overline{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ est un cône convexe.

On considérera aussi le *cône de Tits négatif* $-\mathcal{T}$ et toutes les facettes, chambres, cloisons négatives obtenues par l'opération $\Omega \mapsto -\Omega$.

Il peut arriver qu'une facette soit positive et négative, c'est le cas par exemple de V_0. Dans le cas fini, on a $\mathcal{T} = -\mathcal{T} = V$ et toutes les facettes sont sphériques, positives et négatives. Dans le cas non fini on a $\mathcal{T}^\circ \cap -\mathcal{T}^\circ = \emptyset$: une facette sphérique ne peut être positive et négative. Dans le cas affine $\mathcal{T}^\circ = \{v \in V \mid \delta(v) > 0\}$ avec $\delta \in \Delta^+_{im}$ et $\mathcal{T} = V_0 \cup \mathcal{T}^\circ$.

Dans le cas modérément imaginaire toute racine imaginaire positive est positive sur $\mathcal{T}$. En particulier le cas modérément imaginaire fini est un cas sans imaginaire.

1.4. L'appartement affine témoin $\mathbb{A}$

On choisit un espace affine $\mathbb{A}$ sous l'espace vectoriel V muni d'une collection $\mathcal{M}$ d'hyperplans affines (appelés *murs* ou *murs réels*) telle que:

a) pour tout $M \in \mathcal{M}$, il existe une racine $\alpha_M \in \Phi$ telle que la direction M^v de M soit le mur vectoriel $M^v(\alpha_M) = Ker(\alpha_M)$,

b) toute racine $\alpha \in \Phi$ peut s'écrire $\alpha = \alpha_M$ pour une infinité de murs M,

c) pour $M \in \mathcal{M}$, on note r_M la réflexion d'hyperplan M dont l'application linéaire associée est r_{α_M} et on suppose que le groupe W engendré par les r_M stabilise $\mathcal{M}$.

d) On considère aussi l'ensemble $\mathcal{M}^i$ des *murs imaginaires* qui sont tous les hyperplans affines dont la direction est de la forme $\mathrm{Ker}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta_{im}$. Cet ensemble $\mathcal{M}^i$ est stable par W (et même par le groupe $W^e_{\mathbb{R}}$ défini en 1.6.1).

Le groupe W est le *groupe de Weyl* (affine) de $\mathbb{A}$.

La *dimension* (resp. le *rang* (vectoriel)) de $\mathbb{A}$ est $dim(V)$ (resp. $|I|$).

On dit que $\mathbb{A}$ est *semi-discret* (resp. *dense*) si, pour toute racine réelle α, l'ensemble des murs de direction $Ker(\alpha)$ est discret (resp.dense). L'ensemble $\mathcal{M}$

n'est un ensemble discret d'hyperplans que si, de plus, on est dans le cas fini ; on dit alors que $\mathbb{A}$ est *discret*.

Un point $x \in \mathbb{A}$ est *spécial* si tout mur réel admet un mur parallèle passant par x (il existe toujours de tels points).

Si on choisit un point spécial x_0 comme origine, les murs réels ou imaginaires peuvent être décrits comme les $M(\alpha, k) = \{v \in \mathbb{A} \mid \alpha(v) + k = 0\}$ pour $\alpha \in \Delta$ et $k \in \Gamma_\alpha$, où Γ_α est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; si α est réelle, Γ_α est infini et contient 0, si α est imaginaire, $\Gamma_\alpha = \mathbb{R}$. On note $D(\alpha, k) = \{v \in \mathbb{A} \mid \alpha(v) + k \geq 0\}$ (resp. $D^\circ(\alpha, k) = \{v \in \mathbb{A} \mid \alpha(v) + k > 0\}$) ; si α est réelle on l'appelle un *demi-appartement* (resp. *demi-appartement-ouvert*). On note $D(\alpha, \infty) = D^\circ(\alpha, \infty) = \mathbb{A}$ et, pour α réelle, $r_{\alpha,k} = r_{M(\alpha,k)}$.

N.B. L'ensemble $\mathcal{M}^i$ des murs imaginaires ne servira en fait qu'à définir l'enclos d'une partie de $\mathbb{A}$, *cf.* 1.7.2.

1.5. Le groupe de Weyl W et les relations de préordre sur $\mathbb{A}$

1) Pour $\alpha \in \Phi$, il est clair que W contient les translations de vecteurs dans $\tilde{\Gamma}_\alpha.\alpha^\vee$, où $\tilde{\Gamma}_\alpha$ est le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par Γ_α et que $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha + 2\tilde{\Gamma}_\alpha$ (condition c), en particulier $\Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha$. Par contre on peut avoir $\Gamma_\alpha \neq \tilde{\Gamma}_\alpha$ si Γ_α n'est pas discret [7 ; 6.2.17].

On note $Q^\vee = \sum_{\alpha\in\Phi} \tilde{\Gamma}_\alpha.\alpha^\vee$, c'est un sous-groupe de V stable par W^v (car $\Gamma_{w\alpha} = \Gamma_\alpha$). On l'identifie à un groupe de translations de $\mathbb{A}$ (contenu dans W). Pour $\alpha \in \Phi$, $M = M(\alpha, k)$ et $N = M(\alpha, 0)$, r_M est le composé de r_N et de la translation de vecteur $k\alpha^\vee$. Donc, si on identifie W^v au sous-groupe de W fixant l'origine (spéciale) x_0, on a une décomposition en produit semi-direct: $W = W^v \ltimes Q^\vee$.

2) *Remarque* : Si $\mathbb{A}$ est discret, quitte à quotienter par V_0 on est dans le cas essentiel et l'ensemble des points spéciaux est discret dans $\mathbb{A}$. Ainsi $Q^\vee$ (qui les stabilise) est un sous-groupe discret de V. Comme W^v est fini, un produit scalaire W^v-invariant identifie V à V^* de façon que α_i soit colinéaire à $\alpha_i^\vee$, donc $Q^\vee$ est un réseau de V. On sait alors que W^v est cristallographique [4 ; VI 2.5] : les éléments de la matrice de Coxeter sont 1, 2, 3, 4 ou 6. On peut donc se ramener au cas classique de 1.2.1.

3) On note $P^\vee$ le sous-groupe de V stabilisant $\mathcal{M}$, il contient $Q^\vee$ et V_0. Alors $W_P = W^v \ltimes P^\vee$ est le plus grand sous-groupe de $W^e_{\mathbb{R}} = W^v \ltimes V$ stabilisant $\mathcal{M}$.

4) *Préordres :* Le cône de Tits $\mathcal{T}$, son adhérence $\overline{\mathcal{T}}$ et son intérieur $\mathcal{T}^\circ$ sont des cônes convexes et W^v-invariants, on obtient donc trois préordres $W^e_{\mathbb{R}}-$invariants sur $\mathbb{A}$ en posant:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{T} \quad , \quad x \overline{\leq} y \Leftrightarrow y - x \in \overline{\mathcal{T}} \quad , \quad x \overset{\circ}{\leq} y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{T}^\circ \cup \{0\}.$$

On a souvent $\mathcal{T} \cap -\mathcal{T} \neq \{0\}$, ce qui implique que $\leq$ ou $\overline{\leq}$ n'est pas une relation d'ordre. Par contre en dehors du cas fini on a $\mathcal{T}^\circ \cap -\mathcal{T}^\circ = \emptyset$, donc $\overset{\circ}{\leq}$ est une relation d'ordre. Dans le cas fini, on a $\mathcal{T}^\circ = V$, donc $x \leq y$ et $x \overset{\circ}{\leq} y$ pour tous x, y dans $\mathbb{A}$. Dans le cas affine essentiel $\leq$ et $\overset{\circ}{\leq}$ coïncident ; de plus pour tous x, y dans $\mathbb{A}$ on a $x \overline{\leq} y$ ou $x \geq y$ (et les deux à la fois seulement pour $x = y$). Si W^v est essentiel, sans facteur fini ni affine, alors $\leq$, $\overset{\circ}{\leq}$ et $\overline{\leq}$ sont des relations d'ordre [2 ; 2.6.3].

1.6. Exemples

1) On peut considérer l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ de tous les hyperplans de direction dans $\mathcal{M}^v$. On a donc 4 appartements affines (très liés) $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{A}^{si}$ et $\mathbb{A}^{si}_{\mathbb{R}}$ associés aux systèmes de murs $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^i$, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{M}^i$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. L'appartement $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{A}^{si}_{\mathbb{R}}$ est dense et tous ses points sont spéciaux. Le groupe de Weyl (resp. le groupe W_P) correspondant est $W_{\mathbb{R}} = W^v \ltimes Q^\vee_{\mathbb{R}}$ (resp. $W^e_{\mathbb{R}} = W^v \ltimes V$) où $Q^\vee_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}.\alpha^\vee$.

Un mur ou demi-appartement relatif à $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ mais pas à $\mathcal{M}$ sera dit *fantôme* ; par opposition un mur ou demi-appartement relatif à $\mathcal{M}$ sera parfois dit *vrai*.

2) Dans le cas Kac-Moody sans imaginaire ou modérément imaginaire, on peut choisir un sous-groupe fixe non trivial Γ de $\mathbb{R}$ et poser $\Gamma_\alpha = \Gamma$, $\forall \alpha \in \Phi$. Alors $Q^\vee = \oplus_{i \in I} \Gamma.\alpha_i^\vee$ et donc W stabilise bien $\mathcal{M}$. L'appartement $\mathbb{A}$ est semi-discret (resp. dense) si et seulement si Γ est discret (resp. dense) dans $\mathbb{R}$ et alors $Q^\vee$ est discret (resp. dense) dans $Q^\vee_{\mathbb{R}}$. Le cas $\Gamma = \mathbb{Z}$ est développé dans [13].

Dans le cas modérément imaginaire, il est en fait naturel de poser, comme dans *loc. cit.* , $\Gamma_\alpha = \Gamma$, $\forall \alpha \in \Delta_{im}$, ce qui est contraire à la convention de 1.4.d. Mais comme tout multiple entier d'une racine imaginaire α est une racine, l'ensemble des murs de direction Kerα est alors dense dans $\mathbb{A}$. Comme la définition ci-dessous de l'enclos permet de faire intervenir $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D(n\alpha, k_{n\alpha})$ pour des $k_\beta \in \Gamma$, cette convention et celle de 1.4.d donnent les mêmes enclos.

Ceci explique la définition simplificatrice de $\mathcal{M}^i$ adoptée en 1.4.d. On notera cependant que les 2 conventions peuvent donner (en 1.7.3 ci-dessous) des facettes légèrement différentes (car une intersection décroissante de demi-espaces ouverts est un demi-espace fermé), même si les facettes fermées sont les mêmes.

3) Dans le cas Kac-Moody sans imaginaire, si $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ est une valuation réelle d'une donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}, T)$ (*cf.* [28]), on note $\Gamma_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha \setminus \{1\})$. Si Φ est classique, on définit ainsi un appartement affine $\mathbb{A}$ [7]. Il est vraisemblable que ceci reste vrai dans le cas Kac-Moody général.

1.7. Facettes et autres filtres

Les facettes de $\mathbb{A}$ sont associées aux murs et demi-appartements ; mais, comme dans [7], ce ne sont a priori des sous-ensembles de $\mathbb{A}$ que dans le cas discret. En général on doit les définir comme des filtres de parties de $\mathbb{A}$. On adopte pour les filtres les conventions de [29] ou [13].

1) Pour $x \in \mathbb{A}$, on note $\mathcal{V}_x$ le filtre des voisinages dans $\mathbb{A}$ du point x. Si Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{A}$ contenant x dans son adhérence, le *germe de* Ω *en* x est le filtre $germ_x(\Omega) = \Omega \cap \mathcal{V}_x$ formé des sous-ensembles de $\mathbb{A}$ contenant un voisinage de x dans Ω.

En particulier, pour $x \neq y \in \mathbb{A}$, $[x, y) = germ_x([x, y])$ (resp. $]x, y) = germ_x(]x, y]))$ est le germe en x du segment $[x, y]$ (resp. de l'intervalle $]x, y] = [x, y] \setminus \{x\}$). Ce germe est dit *positif* (resp. *négatif*) si $x \leq y$ (resp. $y \leq x$). Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que $[x, y]$, $[x, y)$ ou $]x, y)$ et la demi-droite d'origine x contenant y sont *préordonnés* ; ils sont *génériques* si la facette $F^v(\pm(y - x))$ est sphérique *i.e.* si $x \overset{\circ}{\leq} y$ ou $y \overset{\circ}{\leq} x$.

Si F est un filtre de parties de $\mathbb{A}$ et $x \in \mathbb{A}$, on dit que $x \in F$ si $x \in S$, $\forall S \in F$ *i.e.* si $\{x\} \subset F$.

Le *support* $supp(F)$ d'un filtre F de parties de $\mathbb{A}$ est le plus petit sous-espace affine E de $\mathbb{A}$ contenant F ; c'est aussi le support de l'adhérence $\overline{F}$ de F. La *dimension* de F est la dimension de E.

2) *L'enclos* $cl(F)$ d'un filtre F de parties de $\mathbb{A}$ est le filtre formé des sous-ensembles de $\mathbb{A}$ contenant un élément de F de la forme $\cap_{\alpha\in\Delta} D(\alpha, k_\alpha)$, avec pour chaque α, $k_\alpha \in \Gamma_\alpha \cup \{\infty\}$ (en particulier chaque $D(\alpha, k_\alpha)$ contient F). Un filtre est dit *clos* s'il est égal à son enclos. Tout enclos est clos.

N.B. a) Dans le cas fini non discret, l'enclos tel que défini ici peut être légèrement plus gros que celui de [7 ; 7.1.2]. Par exemple l'enclos d'une partie Ω de $\mathbb{A}$ peut n'être qu'un filtre et non une partie de $\mathbb{A}$; mais alors l'intersection des éléments de $cl(\Omega)$ est l'enclos tel que défini dans *l.c.*

b) Cet enclos est plus petit que l'enclos défini à partir de $\mathcal{M}$ uniquement (cas sans imaginaire) que l'on notera $cl^{si}(F)$.

Le $\mathbb{R}-$*enclos* $cl_{\mathbb{R}}(F)$ du filtre F est défini de la même manière que l'enclos avec $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ à la place de $\mathcal{M}$. Dans le cas très imaginaire le $\mathbb{R}-$enclos n'est rien d'autre que l'enveloppe convexe fermée $conv(F)$ de F. On note $cl^{si}_{\mathbb{R}}(F)$ l'enclos de F associé à $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ (sans $\mathcal{M}^i$). Bien sûr les enclos cl, $cl_{\mathbb{R}}$, cl^{si} et $cl^{si}_{\mathbb{R}}$ sont en fait associés à $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{A}^{si}$ et $\mathbb{A}^{si}_{\mathbb{R}}$. Pour tout filtre F on a : $conv(F) \subset cl_{\mathbb{R}}(F) \subset cl^{si}_{\mathbb{R}}(F) \subset cl^{si}(F)$ et $cl_{\mathbb{R}}(F) \subset cl(F) \subset cl^{si}(F)$.

3) Une *facette-locale* de $\mathbb{A}$ est associée à un point $x \in \mathbb{A}$ et une facette vectorielle F^v dans V; c'est le filtre $F^\ell(x, F^v) = germ_x(x + F^v)$. La *facette* associée à $F^\ell(x, F^v)$ est le filtre $F(x, F^v)$ formé des ensembles contenant une intersection de demi-espaces $D(\alpha, k_\alpha)$ ou $D^\circ(\alpha, k_\alpha)$ (un seul $k_\alpha \in \Gamma_\alpha \cup \{\infty\}$ pour chaque $\alpha \in \Delta$), cette intersection devant contenir $F^\ell(x, F^v)$. La facette-locale F^ℓ et la facette F ont le même enclos qui est aussi la *facette-fermée* $\overline{F}$, adhérence de F.

Cette définition donne des facettes plus grandes (au sens large) que celles de [7 ; 7.2.4] dans le cas fini. Ce sont les mêmes facettes si l'on remplace intersection par intersection finie en [*l.c.* ; 7.2.4 ligne 4] ; cette modification ne change pas le groupe associé et donc pas l'ensemble des appartements contenant la facette. Dans le cas discret, la facette est bien le sous-ensemble de $\mathbb{A}$ considéré par Bruhat et Tits.

Si toute racine de Δ est nulle sur V_0, la facette associée à $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{M}^i$, F^v et x est $F_{\mathbb{R}}(x, F^v) = F^\ell(x, F^v) + V_0$. Dans le cas dense on a $F(x, F^v) = F_{\mathbb{R}}(x, F^v)$ pour x spécial.

4) Une facette-locale ou une facette est dite *positive* ou *négative* si on peut l'écrire $F = F^\ell(x, F^v)$ ou $F = F(x, F^v)$ avec F^v de ce signe ; elle peut être positive et négative.

Cette facette-locale ou facette F est dite *sphérique* si la direction de son support rencontre le cône de Tits ouvert (et donc a un fixateur fini dans W^v), alors son fixateur W_F dans W est fini. Si F^v est sphérique, alors $F^\ell(x, F^v)$ ou $F(x, F^v)$ l'est aussi et c'est équivalent pour une facette-locale.

Si $F = F^\ell(x, F^v)$ est une facette-locale, on a $dim(F) = dim(F^v)$. Ce n'est en général pas vrai pour une facette ou une facette-fermée.

5) **Lemme.** *Si F est une facette, une facette-fermée, une facette-locale ou un filtre clos, alors tout $\Omega \in F$ contient un ouvert non vide du support de$F$.*

N.B. Par contre le support d'un filtre clos n'est pas forcément clos.

Démonstration. Une base du filtre F est formée d'ensembles convexes et il est clair qu'un ensemble convexe contient un ouvert non vide de l'espace affine qu'il engendre. □

6) Dans le cas modérément imaginaire une facette-fermée est l'enclos d'un germe de segment préordonné.

1.8. Chambres, cloisons...

1) Il y a un ordre sur les facettes : les assertions "F est une face de F' " , "F' domine F " et "$F \leq F'$ " sont par définition équivalentes à $F \subset \overline{F'}$.

Tout point $x \in \mathbb{A}$ est contenu dans (l'adhérence d')une unique facette minimale $F(x, V_0)$; le point x est un *sommet* si et seulement si $F(x, V_0) = \{x\}$.

2) Une *chambre* (ou alcôve) est une facette maximale ou, de manière équivalente, une facette que l'on peut écrire sous la forme $C = F(x, C^v)$ où C^v est une chambre vectorielle. Sa dimension est n et elle est sphérique.

Une cloison est une facette maximale parmi les facettes contenues dans au moins un mur (réel), ou de manière équivalente une facette que l'on peut écrire sous la forme $F = F(x, F^v)$ où F^v est une cloison vectorielle et x appartient à un mur de direction $supp(F^v)$. Sa dimension est $n - 1$, son support est un mur et elle est sphérique.

Un *mur d'une chambre* C est le support M d'une cloison F dominée par C. Deux chambres sont dites *adjacentes* (le long de M ou F) si elles dominent une même cloison F de support M. Mais il peut exister une chambre ne dominant aucune cloison, et donc n'ayant aucun mur. Donc, $\mathbb{A}$ n'est pas forcément "connexe par galeries".

3) **Exemple**: On se place dans le cas (assez général) de 1.2.1: le cas Kac-Moody (sans imaginaire ou modérément imaginaire) avec des Γ_α comme en 1.4 (supposés seulement infinis). On va mieux décrire ci-dessous la facette $F = F(x, F^v(J))$ même quand x n'est pas spécial. On note $\Phi_x = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(x) \in \Gamma_\alpha\}$, $\Delta(J) = \Delta \cap (\oplus_{j \in J} \mathbb{R}\alpha_j)$ et $\Phi(J) = \Phi \cap \Delta(J)$.

Si J n'est pas sphérique, alors (que ce soit avec ou sans imaginaires) on a $\dim(F) \leq n-1$. Plus précisément *supp*(F) est contenu dans l'intersection $x + V'(J)$ des hyperplans affines $x+\mathrm{Ker}\beta$ pour les $\beta \in V^* \setminus \{0\}$ tels que $\mathbb{R}\beta$ soit point d'accumulation (dans $\mathbb{P}(V^*)$) des $\mathbb{R}\gamma$ pour $\gamma \in \Phi(J)$. L'espace $V'(J)$ est stable par $W^v(J)$. De plus toute racine $\delta \in \Delta_{im} \cap \Delta(J)$ est nulle sur $V'(J)$ [16 ; ex. 5.12], donc F n'est pas sphérique.

Si J est sphérique, alors F est également sphérique. On a $\dim(F) = n$ si et seulement si $\Phi_x \cap \Phi(J) = \emptyset$ et alors $F = F(x, C^v_f)$ est une chambre. On a $\dim(F) = n-1$ si et seulement si $|\Phi_x \cap \Phi(J)| = 1$; on peut supposer que $\Phi^+_x \cap \Phi(J) = \{\alpha_{j_0}\}$ pour $j_0 \in J$ et alors $F = F(x, F^v(\{j_0\}))$ est une cloison.

Ainsi une facette de dimension n est une chambre et une facette de dimension $n-1$ est soit une cloison soit non sphérique. Donc l'ensemble $\mathcal{F}$ des facettes de $\mathbb{A}$ et le cône de Tits déterminent l'ensemble $\mathcal{M}$ des murs.

1.9. Quartiers

Un *quartier* dans $\mathbb{A}$ est un translaté $\mathfrak{q} = x + C^v$ d'une chambre vectorielle ; x est son *sommet* et C^v sa *direction*. Deux quartiers ont la même direction si et seulement si ils sont translatés l'un de l'autre et si et seulement si leur intersection contient un autre quartier.

Le *germe de quartier* du quartier $\mathfrak{q} = x + C^v$ est le filtre $germ_\infty(\mathfrak{q}) = \mathfrak{Q}$ formé des sous-ensembles de $\mathbb{A}$ contenant un translaté de $\mathfrak{q}$; il est bien déterminé par la direction C^v. Ainsi l'ensemble des classes de quartiers de $\mathbb{A}$ à translation près, l'ensemble des chambres vectorielles de V et l'ensemble des germes de quartiers de $\mathbb{A}$ sont en bijection canonique.

Une *face* (resp. *cloison*)*de quartier* dans $\mathbb{A}$ est un translaté $\mathfrak{f} = x + F^v$ d'une facette (resp. cloison) vectorielle. Le *germe de face de quartier* de la face de quartier $\mathfrak{f} = x + F^v$ est le filtre $germ_\infty(\mathfrak{f}) = \mathfrak{F}$ formé des sous-ensembles de $\mathbb{A}$ contenant un *raccourci* de $\mathfrak{f}$ *i.e.* un translaté quelconque $\mathfrak{f}'$ de $\mathfrak{f}$ par un élément de $\overline{F^v}$ (donc $\mathfrak{f}' \subset \mathfrak{f}$). Si F^v est sphérique, alors $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$ sont aussi dits *sphériques* (ou *évasés*). Le *signe* de $\mathfrak{f}$ ou $\mathfrak{F}$ est le signe de leur *direction* F^v.

1.10. Cheminées

Une *cheminée* est associée à une facette $F = F(x, F_0^v)$ (sa *base*) et une facette vectorielle F^v (sa *direction*), c'est le filtre

$$\mathfrak{r}(F, F^v) = cl(F + F^v) = cl(germ_x(x + F_0^v) + F^v) \supset cl(F) + \overline{F^v} = \overline{F} + \overline{F^v} \ .$$

La cheminée $\mathfrak{r}(F, F^v)$ est dite *évasée* si F^v est sphérique, son *signe* est celui de F^v. Cette cheminée est dite *solide* (resp. *pleine*) si la direction de son support a un fixateur fini dans W^v (resp. si son support est $\mathbb{A}$).

Remarques 1.11.

1) Si F^v ou F est sphérique (resp. une chambre), alors $\mathfrak{r}(F, F^v)$ est solide (resp. pleine). En particulier une cheminée évasée est solide.

2) La plénitude de la cheminée $\mathfrak{r}$ équivaut au fait que tout $S \in \mathfrak{r}$ contient un ouvert non vide de $\mathbb{A}$ (lemme 1.7.5), alors le fixateur (point par point) $W_\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{r}$ dans W est réduit à l'élément neutre.

3) Dans le cas fini toute cheminée est évasée et toute face de quartier ou facette est sphérique.

4) Dans le cas fini ou si F^v n'est pas sphérique, il peut arriver que la cheminée soit à la fois positive et négative.

5) Si $F^v = V_0$ est la facette vectorielle minimale, alors $\mathfrak{r}(F, F^v) = \overline{F} + V_0 \subset cl^{si}(\overline{F})$ et est égal à la facette-fermée $\overline{F}$ si toute $\alpha \in \Delta$ est nulle sur V_0 (*e.g.* dans le cas modérément imaginaire). Toute facette-fermée engendre donc une cheminée (dégénérée) qui n'est évasée que dans le cas fini.

6) L'enclos d'une face de quartier $\mathfrak{f} = x + F^v$ est une cheminée (avec $F_0^v = V_0$ ou $F_0^v = F^v$) de même direction que $\mathfrak{f}$. La face de quartier est sphérique si et seulement si la cheminée correspondante est évasée.

7) Dans le cas modérément imaginaire et sauf si la direction est réduite à $\{0\}$, on peut décrire l'adhérence d'une face de quartier comme le $\mathbb{R}-$enclos d'une demi-droite préordonnée et une cheminée comme l'enclos d'une demi-droite préordonnée et d'un germe de segment préordonné de même origine. La face de quartier est sphérique (ou la cheminée est évasée) si et seulement si la demi-droite est générique.

1.12. Germes de cheminées ou demi-droites

Un *raccourci* d'une demi-droite δ d'origine x est une demi-droite δ_y d'origine $y \in \delta$ définie par $\delta_y = \delta + (y - x) = \delta \setminus [x, y[$. Le *germe* de cette demi-droite est le filtre $germ_\infty(\delta)$ des parties de $\mathbb{A}$ contenant un de ses raccourcis.

Un *raccourci* d'une cheminée $\mathfrak{r}(F, F^v)$ est défini par un élément $\xi \in \overline{F^v}$, c'est la cheminée $cl(F + \xi + F^v)$. Le *germe* de cette cheminée est le filtre $\mathfrak{R}(F, F^v) = germ_\infty(\mathfrak{r}(F, F^v))$ des parties de $\mathbb{A}$ contenant un de ses raccourcis.

Remarques: 1) La direction F^v est bien déterminée par $\mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{R}$ (ce n'est pas vrai pour la base) : $\overline{F^v}$ est la réunion des demi-droites vectorielles telles que tout élément du filtre $\mathfrak{R}$ contienne une demi-droite de cette direction.

2) Un raccourci d'une cheminée a la même direction, le même support, le même signe et donc les mêmes propriétés (évasée, solide ou pleine) que la cheminée originelle ; ces objets et ces propriétés sont donc attachés au germe.

3) Dans le cas dégénéré où $F^v = V_0$, tout raccourci de $\mathfrak{r}$ est égal à $\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$.

4) Un germe de quartier est un germe de cheminée évasée pleine.

1.13. Appartements de type $\mathbb{A}$

Un *appartement de type* $\mathbb{A}$ est un ensemble A muni d'un ensemble $Isom(\mathbb{A}, A)$ de bijections $f : \mathbb{A} \to A$ (appelées *isomorphismes*) tel que, si $f_0 \in Isom(\mathbb{A}, A)$, alors $f \in Isom(\mathbb{A}, A)$ si et seulement si il existe $w \in W$ vérifiant $f = f_0 \circ w$.

Un *isomorphisme* entre deux appartements A et A' est une bijection $\varphi : A \to A'$ telle qu'il existe $f_0 \in Isom(\mathbb{A}, A)$ avec $\varphi \circ f_0 \in Isom(\mathbb{A}, A')$ (*i.e.* $f \in Isom(\mathbb{A}, A)) \Leftrightarrow \varphi \circ f \in Isom(\mathbb{A}, A')$).

En particulier un appartement A possède une structure naturelle d'espace affine sous un espace vectoriel réel $V(A)$, avec des ensembles $\Phi(A) \subset \Delta(A) \subset V(A)^*$ de racines, des murs ou murs imaginaires, des cônes de Tits $\pm\mathcal{T}(A)$ dans $V(A)$ et des relations de préordre $\leq_A$, $\overline{\leq}_A$, $\overset{\circ}{\leq}_A$. Il contient des facettes, des demi-appartements, des quartiers, des cheminées ... et plus généralement tout ce que l'on vient de définir, puisque ces notions sont invariantes par W. De plus un isomorphisme d'appartements échange ces structures, objets et relations.

2. Masures affines

Pour simplifier on se place dorénavant dans le cas modérément imaginaire. Il faudrait sinon rajouter à la définition 2.1 ci-dessous au moins certaines des propriétés démontrées en 2.2. Le cas très imaginaire avec enclos réel (égal à l'enveloppe convexe fermée) pourrait quand même être intéressant.

Définition 2.1. Une *masure affine* de type $\mathbb{A}$ est un ensemble $\mathcal{I}$ muni d'un recouvrement par un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles appelés *appartements* tel que:

(MA1) Tout $A \in \mathcal{A}$ est muni d'une structure d'appartement de type $\mathbb{A}$.

(MA2) Si F est un point, un germe d'intervalle préordonné, une demi-droite générique ou une cheminée solide d'un appartement A et si A' est un autre appartement contenant F, alors $A \cap A'$ contient l'enclos $cl_A(F)$ de F dans A et il existe un isomorphisme de A sur A' fixant (point par point) cet enclos.

(MA3) Si $\mathfrak{R}$ est un germe de cheminée évasée, si F est une facette ou un germe de cheminée solide, alors $\mathfrak{R}$ et F sont toujours contenus dans un même appartement.

(MA4) Si deux appartements A, A' contiennent $\mathfrak{R}$ et F comme en (MA3), alors leur intersection $A \cap A'$ contient l'enclos $cl_A(\mathfrak{R} \cup F)$ de $\mathfrak{R} \cup F$ dans A et il existe un isomorphisme de A sur A' fixant (point par point) cet enclos.

Par référence aux décompositions correspondantes dans les groupes de Kac-Moody (*cf.* § 6), si $\mathfrak{R}$ est un germe de quartier et F une facette (resp.un germe de quartier de même signe, de signe opposé) on dit que (MA3) ou (MA4) est la partie existence ou unicité de la *propriété d'Iwasawa* (resp. *de Bruhat, de Birkhoff*) ; on ajoute le qualificatif *mixte* si on remplace germe de quartier par germe de cheminée évasée non dégénérée ou solide non dégénérée. La *propriété de Bruhat-Iwahori* correspondrait au cas où $\mathfrak{R}$ et F sont des facettes (*cf.* (I1) et (I2) en 2.2.6 ci-dessous) ; elle est rarement vérifiée par les masures affines: seulement par les immeubles affines (*cf.* 2.4, 2.5).

Remarque. Les définitions des masures affines de type $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{A}^{si}$ et $\mathbb{A}^{si}_{\mathbb{R}}$ ne diffèrent donc que par les contraintes plus ou moins grandes imposées par le fait de contenir les enclos correspondants. Le type $\mathbb{A}^{si}$ est le plus contraignant, on espère pouvoir toujours s'y ramener. Le type $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ est le moins contraignant.

2.2. Premières conséquences

1) Si la conclusion de (MA2) est vérifiée pour un filtre F, elle l'est aussi pour tout filtre F' tel que $F \subset F' \subset cl_A(F)$. En particulier si (MA2) est vérifié, il s'applique aussi bien quand F est un germe de segment préordonné, une facette-locale, une facette, une facette-fermée ou une face de quartier sphérique. De même (MA2) s'applique alors aussi quand F est un germe de demi-droite générique, un germe de face de quartier sphérique ou un germe de cheminée solide.

2) L'axiome (MA2) et la remarque finale de 1.13 montrent que les notions de germe de segment (ou d'intervalle) préordonné, facette, facette-locale, facette-fermée, demi-droite générique, face de quartier sphérique, cheminée solide et les germes associés sont bien définis dans la masure indépendamment de l'appartement qui les contient. De même les qualificatifs qui s'appliquent à ces objets (positif, négatif, sphérique, générique, évasé, pleine, dimension, type, chambre, cloison) ne dépendent pas de l'appartement. On utilise ceci dans les axiomes (MA3) et (MA4).

3) D'après (MA2) les axiomes (MA3) et (MA4) s'appliquent aussi dans une masure quand F est un point, un germe de segment préordonné, une facette-locale ou une facette-fermée et quand $\mathfrak{R}$ ou F est un germe de demi-droite générique ou un germe de face de quartier sphérique.

Bien sûr (MA3) (mais pas forcément (MA4)) s'applique aussi si $\mathfrak{R}$ ou F est contenu dans l'un des objets indiqués, par exemple si $\mathfrak{R}$ est un germe de demi-droite générique et si F est un germe de demi-droite préordonnée.

4) Les enclos $cl_A(-)$ intervenant dans les axiomes (MA2) et (MA4) ne dépendent finalement pas de l'appartement A choisi dans la masure et sont donc notés simplement $cl(-)$.

5) Un mur (dans un appartement) est l'enclos de deux germes de cloisons de quartier ; ainsi les appartements contenant un mur sont isomorphes et la notion de mur est intrinsèque dans une masure. De même pour un demi-appartement qui est l'enclos d'un germe de quartier et d'un germe de cloison de quartier.

6) Dans le cas fini, tout appartement A est muni d'une métrique euclidienne d_A, W_A-invariante. De plus on a vu (1.11.5) qu'une facette-fermée est un germe de cheminée évasée, une masure affine vérifie donc dans ce cas les trois axiomes habituels des immeubles (*cf.* [32] ou [6] dans le cas discret et [29] dans le cas affine général) :

(I0) Tout $A \in \mathcal{A}$ est un appartement euclidien.

(I1) Deux facettes sont toujours contenues dans un même appartement.

(I2) Si A et A' sont deux appartements, leur intersection est une réunion de facettes et, pour toutes facettes F, F' dans $A \cap A'$, il existe un isomorphisme de A sur A' fixant les facettes-fermées $\overline{F}$ et $\overline{F'}$.

En particulier la propriété de Bruhat-Iwahori est vérifiée et la masure affine est ordonnée au sens suivant.

Définitions 2.3. La masure affine $\mathcal{I}$ est dite *ordonnée* si elle vérifie l'axiome supplémentaire suivant :

(MAO) Soient x, y deux points de $\mathcal{I}$ et A, A' deux appartements les contenant ; si $x \leq_A y$, alors les segments $[x, y]_A$ et $[x, y]_{A'}$ définis par x et y dans A et A' sont égaux.

La masure affine $\mathcal{I}$ est dite *épaisse* si toute cloison de $\mathcal{I}$ est dominée par au moins trois chambres.

Tous les qualificatifs qui s'appliquent à $\mathbb{A}$ s'appliquent aussi à $\mathcal{I}$, *e.g.* semi-discret, discret, dense, sans imaginaire, dimension, rang (vectoriel), type fini, type classique, ...

Remarques: 1) La seconde définition est habituelle. La première est une condition de "convexité préordonnée" des intersections d'appartements ; c'est l'axiome (MA4) en remplaçant $(\mathfrak{R}, F)$ par certaines paires de points (5.4). On verra au § 5 qu'elle permet de définir des préordres globaux sur $\mathcal{I}$.

2) vidémment une masure $\mathcal{I}$ de type $\mathbb{A}$ est munie d'une structure naturelle $\mathcal{I}_\mathbb{R}$ de masure de type $\mathbb{A}_\mathbb{R}$ (*cf.* 1.6.1), il suffit de rajouter tous les murs fantômes à la structure. Mais $\mathcal{I}_\mathbb{R}$ ne peut être épaisse (sauf si $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mathbb{R}$). Il n'est pas sûr que cette masure de type $\mathbb{A}$ puisse être munie (comme on l'espère) d'une structure de masure de type $\mathbb{A}^{si}$ ou $\mathbb{A}^{si}_\mathbb{R}$ (sans imaginaire).

2.4. Exemples

1) Soit $\mathcal{I}$ l'immeuble de Bruhat-Tits d'une donnée radicielle valuée (au sens de [7]) que l'on munit de son système canonique $\mathcal{A}$ d'appartements. L'appartement témoin $\mathbb{A}$ est un appartement affine relevant du cas classique (donc fini) de 1.2.1 (sans imaginaire). D'après [7 ; 6.2.11] on peut supposer que la donnée radicielle est génératrice et que l'image du groupe N de cette donnée dans le groupe affine de $\mathbb{A}$ est notre groupe W. De plus pour $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{A}$, le groupe U_Ω défini dans *loc. cit.* fixe le filtre $cl(\Omega)$, même avec notre définition plus restrictive d'enclos. Ainsi [*l.c.* ; 7.4.8 et 7.4.9] montre que l'intersection $A \cap A'$ de deux appartements A, A' est close (même pour notre définition plus restrictive) et que A et A' sont isomorphes par un isomorphisme (au sens de 1.13) fixant cette intersection. On en déduit les axiomes (MA1), (MA2), (MA4) et (MAO). Le théorème 7.4.18 de *loc. cit.* montre l'axiome (MA3) dans les cas impliquant des facettes ou des germes de quartier. Cependant les cheminées n'interviennent pas dans *loc. cit.* Les résultats manquants pour l'axiome (MA3) sont démontrés dans [26], voir aussi [27].

Un immeuble affine irréductible, de dimension ≥ 3 et muni d'un système d'appartements vérifiant les axiomes de [33], est associé à une donnée radicielle valuée, mais en un sens qui peut être plus général que celui de [7]. On n'est donc sûr d'obtenir une masure affine que dans un nombre plus restreint de cas. Mais la démonstration de [26] devrait pouvoir être adaptée à ce cadre, comme elle l'a été ici pour les groupes de Kac-Moody, *cf.* 6.7.

Un immeuble affine simplicial (*i.e.* discret) muni de son système complet d'appartements est une masure affine ordonnée. L'essentiel des résultats se trouve dans les références classiques: [6], [12], [25], [31] ou [40]. Les résultats manquants sur les cheminées sont dans [8].

Les immeubles affines de [33] ont été revisités par Anne Parreau [23], voir aussi [17]. Si on les munit de leur système complet d'appartements, il est vraisemblable que l'on puisse démontrer que deux demi-droites sont (quitte à les raccourcir) contenues dans un même appartement. Joint aux résultats connus, ceci montrerait qu'un tel immeuble affine est une masure affine ordonnée.

On obtient ainsi de nombreux exemples de masures affines ordonnées épaisses de type classique (qui sont aussi des immeubles). Mais ceci ne donne pas de nouveaux objets.

2) Soit G un groupe de Kac-Moody sur un corps K, au sens minimal ("algébrique") de [34]. Ce groupe est muni d'une donnée radicielle génératrice de type un système de racines réelles Φ de Kac-Moody (*i.e.* comme en 1.2.1) [28 ; 1.4]. Si K est muni d'une valuation réelle ω non triviale, la donnée radicielle de G est naturellement munie d'une valuation [28 ; 2.2] et on peut définir un appartement affine $\mathbb{A}$ correspondant (voir [13 ; 2.2] pour ω discrète, mais le cas général est semblable); cet appartement est modérément imaginaire.

Si G est symétrisable, si la valuation ω de K est discrète et si le corps résiduel contient $\mathbb{C}$, on construit dans [13] une masure (hovel) sur laquelle le groupe G agit. Cette masure n'est en général pas un immeuble, faute de satisfaire l'axiome (I1), *i.e.* la propriété de Bruhat-Iwahori. C'est en fait (au moins sous la condition (SC) de 6.1) une masure affine ordonnée épaisse, mais certaines des propriétés exigées dans la définition 2.1 ne sont pas prouvées dans *loc. cit.* Les démonstrations manquantes sont regroupées à la fin de cet article (§ 6).

Malheureusement il n'y a pas encore de construction de masure affine associée à une donnée radicielle valuée quelconque, c'est presque fait par Cyril Charignon [9]. On l'obtient au moins dans le cas présent des groupes de Kac-Moody déployés sur des corps réellement valués quelconques [30] et pour des groupes de Kac-Moody presque déployés si la valuation est discrète et le corps résiduel parfait [9].

2.5. Commentaires sur les définitions

La définition de masure affine adoptée ici est largement inspirée de celle d'immeuble de type affine donnée par J. Tits [33]. Toutes les deux dépendent d'un système d'appartements choisi et font intervenir des éléments à l'infini : les quartiers. On a en fait ici rajouté l'exigence de propriétés d'autres éléments à l'infini, les cheminées définies dans [26]. Cela permet de se passer de l'axiome (A5) introduit par J. Tits (ou de ses variantes, *cf.* [25 ; appendice 2]). Par ailleurs on raisonne ici avec $\mathbb{A}$ plutôt qu'avec $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ comme dans [33].

Les axiomes présentés ici sont compliqués par le fait que beaucoup de cas différents sont considérés. Je n'ai pas trouvé de formulation plus simple qui n'exclurait pas l'exemple fondamental de Kac-Moody ci-dessus (2.4.2) et donc ne risquerait pas de ne s'appliquer qu'à l'ensemble vide (en dehors du cas fini). Il fallait en particulier éviter d'exiger l'axiome (I1) (ou propriété de Bruhat-Iwahori). Cet axiome me semblant fondamental pour les immeubles, j'ai adopté ici le nom de masure.

J'ai simplement demandé dans les axiomes ce que je savais sur les masures de [13]. Les résultats qui vont suivre semblent légitimer ce choix et il ne semble pas y avoir d'hypothèse inutile. J'ai cependant choisi de séparer l'axiome (MAO): il ne fait intervenir que des éléments à distance finie et pourrait d'ailleurs peut-être s'avérer conséquence des autres axiomes. Les propriétés spécifiques des masures affines ordonnées sont abordées dans le § 5.

La définition de masure affine donnée ici est précise. La notion générale de masure est vague ; on peut demander à la place de l'axiome (I1) que, pour deux facettes F et F', il existe N appartements A_i tels que $F \subset A_1$, $F' \subset A_N$ et, pour $i \leq N-1$, $A_i \cap A_{i+1}$ contient une chambre. On a $N = 1$ pour les immeubles et $N \leq 2$ pour les masures affines. Il existe au moins un autre exemple intéressant (avec $N \leq 3$) : [5].

Les masures, comme les immeubles, sont des exemples d'*espaces couverts*, c'est à dire d'ensembles munis d'un recouvrement par des sous-ensembles (appartements ou plats) tous isomorphes par "suffisamment d'isomorphismes". C'est aussi le cas des espaces riemanniens symétriques munis des plats (maximaux); dans ce cas (de manière analogue à l'axiome (I1) des immeubles) deux points sont toujours contenus dans un même plat. Des exemples ne vérifiant pas cette propriété, donc plus proches des masures, semblent à chercher parmi les espaces pseudo-riemanniens symétriques.

2.6. Rétractions

Soit $\mathfrak{R}$ un germe de cheminée évasée pleine dans un appartement A d'une masure affine $\mathcal{I}$.

Pour $x \in \mathcal{I}$, choisissons un appartement A_x contenant $\mathfrak{R}$ et x (MA3). Il existe alors un isomorphisme $\varphi : A_x \to A$ fixant $\mathfrak{R}$. Si φ et φ' sont deux tels isomorphismes, $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ est un automorphisme de A_x fixant la cheminée pleine $\mathfrak{R}$, c'est donc l'identité (1.11.2) et φ est unique. De même d'après (MA4) $\varphi(x)$ ne dépend pas du choix de l'appartement A_x.

On peut donc définir $\qquad \rho_{A,\mathfrak{R}}(x) = \varphi(x) \qquad .$

L'application $\rho_{A,\mathfrak{R}} : \mathcal{I} \to A$ est une rétraction de $\mathcal{I}$ sur A. Elle ne dépend que de A et $\mathfrak{R}$; on l'appelle la *rétraction de $\mathcal{I}$ sur A de centre* $\mathfrak{R}$.

Si A' est un autre appartement contenant $\mathfrak{R}$, on a évidemment $\rho_{A',\mathfrak{R}} = \psi \circ \rho_{A,\mathfrak{R}}$ où ψ est l'unique isomorphisme de A sur A' fixant $\mathfrak{R}$. Ainsi, à isomorphisme unique près, $\rho_{A,\mathfrak{R}}$ ne dépend que de $\mathfrak{R}$.

Remarque: Dans le cas fini, on retrouve ainsi les rétractions bien connues (d'immeubles affines) de centre des chambres ou des germes de quartier. Mais on a aussi des rétractions de centre des germes de cheminées pleines. En fait celles-ci sont des chambres des différents immeubles affines intervenant dans la compactification de Satake de l'immeuble (*cf.* § 4).

Proposition 2.7.

1) Soient $\mathfrak{R}$ un germe de cheminée évasée et x, y deux points dans un appartement A d'une masure affine vérifiant $x \leq_A y$. Il existe une subdivision $z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y$ du segment $[x, y]_A$ et des appartements $A_1, \ldots, A_n$ tels que, pour $1 \leq i \leq n$, l'appartement A_i contienne $\mathfrak{R}$ et le segment $[z_{i-1}, z_i]_A$.

2) Soient F une facette ou un germe de cheminée solide et $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ deux germes de faces de quartier sphériques dans une masure affine $\mathcal{I}$. On suppose qu'il existe un appartement A de $\mathcal{I}$ contenant $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ et que, dans cet appartement, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ ont même direction. Alors il existe dans A des germes de faces de quartier *(sphériques) de même direction* $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}'$ *et des appartements* $A_1, \dots, A_n$ *tels que, pour* $1 \le i \le n$*, l'appartement* A_i *contienne* $\mathfrak{F}_{i-1}$*,* $\mathfrak{F}_i$ *et* F*.*

N.B. a) Bien sûr, dans l'énoncé ci-dessus ont peut remplacer facette par facette-locale, facette-fermée, point ou germe de segment préordonné ; germe de cheminée solide ou évasée par germe de face de quartier sphérique ou demi-droite générique et face de quartier sphérique par demi-droite générique.

b) On sait de plus (MA4) que le fait d'avoir même direction ne dépend pas de l'appartement contenant les deux faces de quartier sphériques ou demi-droites génériques.

Démonstration. Les preuves des deux résultats sont très proches. De plus la première preuve est essentiellement celle de [13 ; sect. 4.4]. On ne fait donc que la seconde preuve.

Notons $\mathfrak{f} = x_- + F^v$ et $\mathfrak{f}' = x_+ + F^v$ des représentants de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ dans A. Le cas où $F^v = V_0$ ne correspond à des faces de quartier sphériques que dans le cas fini et relève de la partie 1). On peut donc supposer que F^v contient une demi-droite générique δ d'origine 0 dans V.

Quitte à remplacer x_+ par $x_+ + \xi$ (et donc $\mathfrak{f}'$ par une raccourcie) pour ξ grand dans δ, on peut supposer $x_- \le_A x_+$ ou $x_- \ge_A x_+$. Pour $z \in [x_-, x_+]_A$, l'ensemble $\mathfrak{r}_z^\pm = cl_A([z, x_\pm) + F^v)$ (si $z \neq x_\pm$) est une cheminée évasée. D'après (MA3) il existe un appartement $A_z^\pm$ contenant F et un raccourci $\mathfrak{r}_z^\pm + \xi_z^\pm = cl_A([z, x_\pm) + \xi_z^\pm + F^v)$ pour $\xi_z^\pm$ assez grand dans δ; cet appartement contient en fait une bande $[z, z + \varepsilon_z^\pm(x_\pm - z)] + \xi_z^\pm + F^v$ pour $\varepsilon_z^\pm > 0$ petit. Mais $[z + \varepsilon_z^-(x_- - z), z + \varepsilon_z^+(x_+ - z)]$ est un voisinage de z dans $[x_-, x_+]$ qui est compact. On peut donc recouvrir $[x_-, x_+]$ par un nombre fini de tels intervalles: il existe une subdivision $z_0 = x_-, z_1, \dots, z_n = x_+$ de $[x_-, x_+]$, des appartements $A_1, \dots, A_n$ et des éléments $\xi_1, \dots, \xi_n \in \delta$ tels que, pour $1 \le i \le n$, l'appartement A_i contient F et $[x_{i-1}, x_i] + \xi_i + F^v$. Il suffit alors de poser $\mathfrak{f}_i = x_i + \xi_i + F^v$ (on peut même supposer tous les ξ_i égaux). □

Corollaire 2.8. *Dans la situation de 2.6 la rétraction* $\rho = \rho_{A,\mathfrak{R}}$ *est "croissante". Plus précisément, si* x *et* y *sont deux points d'un appartement* A' *tels que* $x \le_{A'} y$*, l'image par* ρ *du segment* $[x, y]_{A'}$ *est une ligne brisée* $[\rho z_0, \rho z_1] \cup [\rho z_1, \rho z_2] \cup \cdots \cup [\rho z_{n-1}, \rho z_n]$ *avec* $\rho z_0 = \rho x$*,* $\rho z_n = \rho y$*,* $\rho z_{i-1} \le_A \rho z_i$ *(pour*

$1 \leq i \leq n$) et donc $\rho x \leq_A \rho y$. Le même résultat est valable pour la relation $\overset{\circ}{\leq}$.

N.B. Pour les masures affines préordonnées on verra au § 5 que les différentes relations $\leq_A$ ou $\overset{\circ}{\leq}_A$ se recollent en une relation de préordre sur $\mathcal{I}$; ceci donne un sens plus habituel au qualificatif “croissante”.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition et du fait que les isomorphismes d'appartements échangent les relations de préordre (1.13). □

Proposition 2.9. *1) Soit D un demi-appartement de la masure affine $\mathcal{I}$ et $M = \partial D$ son mur (i.e. son bord). On considère une cloison F dans M et une chambre C de $\mathcal{I}$ dominant F. Il existe alors un appartement A de $\mathcal{I}$ contenant D et C.*

2) Soient D et D_1 deux demi-appartements de $\mathcal{I}$ dont l'intersection est réduite au mur M bordant chacun d'eux : $M = D \cap D_1 = \partial D = \partial D_1$. Alors $D \cup D_1$ est un appartement de $\mathcal{I}$.

Démonstration. 1) Soit $\mathfrak{f} = x + F^v$ une cloison de quartier contenue dans M de sommet $x \in \overline{F}$. Il existe un appartement A_1 contenant $\overline{C}$ et le germe $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{f}$, donc aussi $cl(F \cup \mathfrak{F}) \supset \overline{F} + F^v$. On note $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(C, F^v)$ et $\mathfrak{R}$ son germe (dansA_1). Il est clair que $cl(F \cup \mathfrak{R}) \supset \mathfrak{r} \supset \overline{C}$. Soit $\mathfrak{f}' = x - F^v$ la cloison de quartier dans M de sommet x et de direction opposée à $\mathfrak{f}$. On note $\mathfrak{q}'$ le quartier de D de sommet x tel que $\mathfrak{f}' \subset \overline{\mathfrak{q}'}$. Il existe un appartement A_2 contenant son germe $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{F}$. Ainsi $D = cl(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{Q}')$ est dans A_2 qui contient aussi $cl(F \cup \mathfrak{R}) \supset \overline{C}$.

2) Soit $x \in M$, on choisit $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ ($\subset M$) et $\mathfrak{q}'$ ($\subset D$) comme ci-dessus.

Soit $\mathfrak{f}_1 \subset D_1 \setminus M$ une cloison de quartier de même direction que $\mathfrak{f}$ et A_1 un appartement contenant les germes $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{F}_1$; montrons que A_1 contient $\mathfrak{F}$ (et donc $D = cl(\mathfrak{Q}' \cup \mathfrak{F})$). On se ramène par récurrence, grâce à 2.7.2, au cas où $\mathfrak{Q}', \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ sont dans un même appartement A_2. Si, dans A_2, $\mathfrak{F} \subset cl(\mathfrak{Q}' \cup \mathfrak{F}_1)$ le résultat est évident. Sinon $\mathfrak{F}_1 \subset cl(\mathfrak{Q}' \cup \mathfrak{F}) = D$, c'est absurde d'après l'hypothèse $D \cap D_1 = M$.

Soit maintenant $\mathfrak{q}_1$ le quartier de D_1 de sommet x tel que $\mathfrak{f} \subset \overline{\mathfrak{q}_1}$. Il existe un appartement A_3 contenant les germes $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{Q}_1$; il contient donc une cloison de quartier $\mathfrak{f}_1 \subset D_1 \setminus M$ de même direction que $\mathfrak{f}$. D'après l'alinéa précédent

A_3 contient $\mathfrak{F}$ et même D. Ainsi A_3 contient $D_1 = cl(\mathfrak{F}' \cup \mathfrak{Q}_1)$. Finalement $D \cup D_1 \subset A_3$ et on a égalité car, dans un appartement, un mur ne borde que deux demi-appartements. □

Corollaire 2.10. *Si la masure $\mathcal{I}$ est épaisse, un demi-appartement est l'intersection de deux appartements.*

Conséquence. Ainsi dans une masure épaisse un sous-ensemble clos d'appartement est une intersection d'appartements. Par contre on n'est pas sûr que l'intersection de deux appartements soit close.

Remarque. On dit qu'un mur est *épais* si tout demi-appartement qu'il borde est intersection de deux appartements. On va montrer qu'un mur est épais si (et seulement si) une (resp. toute) cloison qu'il contient est épaisse *i.e.* dominée par au moins trois chambres.

Démonstration. Soit D un demi-appartement dans un appartement A_1 de $\mathcal{I}$. On choisit une cloison $F = F(x, F^v)$ (avec F^v cloison vectorielle) dans le mur M bordant D. On note C (resp. C_1) la chambre de A_1 dominant F contenue dans D (resp. $A_1 \setminus D$). Par hypothèse il existe une chambre C_2 dominant F différente de C et C_1. D'après la proposition il existe un appartement A_2 contenant D et C_2 ; montrons que $D = A_1 \cap A_2$. Sinon il existe y dans $(A_1 \cap A_2) \setminus D$. Calculé dans A_1, l'enclos de $\{y\} \cup germ_\infty(x \pm F^v)$ contient une cheminée raccourcie de $\mathfrak{r}^\pm = \mathfrak{r}(C_1, \pm F^v)$. Ainsi $A_1 \cap A_2$ contient les germes $\mathfrak{R}^+$, $\mathfrak{R}^-$ et donc leur enclos : $A_1 \cap A_2$ contient l'espace de A_1 compris entre M et un mur de $A_1 \setminus D$ parallèle à M. On en déduit aussitôt que $A_1 \cap A_2$ contient C_1, ainsi A_2 contient trois chambres distinctes C, C_1 et C_2 dominant F, c'est absurde. □

3. Parallélisme et immeubles jumelés à l'infini

On considère une masure affine $\mathcal{I}$

Définitions 3.1.

Soient $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ deux faces de quartier sphériques, il existe un appartement A contenant les germes correspondants $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$.

On dit que $\mathfrak{f}$ est *parallèle* à $\mathfrak{f}'$ (noté $\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{f}'$) si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ ont même direction dans A, *i.e.* on peut écrire $\mathfrak{F} = germ_\infty(x + F^v)$ et $\mathfrak{F}' = germ_\infty(y + F^v)$ dans A.

On dit que $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ sont *de directions opposées* (ou *opposées* pour abréger) (noté $\mathfrak{f}$ *opp* $\mathfrak{f}'$) si on peut écrire $\mathfrak{F} = germ_\infty(x + F^v)$ et $\mathfrak{F}' = germ_\infty(y - F^v)$ dans A.

On dit que $\mathfrak{f}$ *domine* $\mathfrak{f}'$ (noté $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}'$) si on peut écrire $\mathfrak{F} = germ_\infty(x + F^v)$ et $\mathfrak{F}' = germ_\infty(y + F'^v)$ dans A avec $F'^v \subset \overline{F^v}$.

Remarques. a) Comme A est unique à isomorphisme fixant $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ près, ces définitions ne dépendent pas du choix de A et bien sûr elles ne dépendent que des germes.

b) Si $\mathfrak{f}$ est parallèle à $\mathfrak{f}'$ ou domine $\mathfrak{f}'$ (resp. est opposée à $\mathfrak{f}'$), les deux faces de quartier ont même signe (resp. des signes opposés).

c) Pour les quartiers, $\mathfrak{q}$ est parallèle à $\mathfrak{q}'$ si et seulement si $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$.

d) Ces définitions et la proposition suivante sont aussi valables pour les demi-droites génériques. On pourrait aussi parler de parallélisme et opposition entre un germe de segment préordonné et un germe de demi-droite générique, *cf.* [27].

Proposition 3.2.

1) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur les faces de quartier sphériques.

2) La domination est un préordre (partiel) sur les faces de quartier sphériques qui est compatible avec le parallélisme. Plus précisément le parallélisme est la relation d'équivalence associée à ce préordre. On a :

$$\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}' \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \mathfrak{f}'_1 \,,\ \mathfrak{f}'_1 \parallel \mathfrak{f}' \,,\ \mathfrak{f}'_1 \subset \overline{\mathfrak{f}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \mathfrak{f}_1 \,,\ \mathfrak{f}_1 \parallel \mathfrak{f} \,,\ \mathfrak{f}' \subset \overline{\mathfrak{f}_1}$$

3) L'opposition est symétrique et compatible avec le parallélisme et la domination. On a :

$$\mathfrak{f}_1 \parallel \mathfrak{f}\ opp\ \mathfrak{f}' \parallel \mathfrak{f}'_1 \Rightarrow \mathfrak{f}_1\ opp\ \mathfrak{f}'_1 \qquad , \qquad \mathfrak{f}\ opp\ \mathfrak{f}' \geq \mathfrak{f}'' \Leftrightarrow \exists\, \mathfrak{f}'_1,\ \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}'_1\ opp\ \mathfrak{f}''$$

et $$\mathfrak{f}\ opp\ \mathfrak{f}' \leq \mathfrak{f}'' \Leftrightarrow \exists\, \mathfrak{f}'_1,\ \mathfrak{f} \leq \mathfrak{f}'_1\ opp\ \mathfrak{f}'' \qquad .$$

Démonstration.

Soient $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}''$ trois faces de quartier sphériques telles que $\mathfrak{f}' \parallel \mathfrak{f}''$ et $\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{f}'$ (resp. $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}$ *opp* $\mathfrak{f}'$), il est évident que $\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{f}''$ (resp. $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}''$, $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{f}''$, $\mathfrak{f}$ *opp* $\mathfrak{f}''$) si les trois germes sont situés dans un même appartement. Mais la proposition 2.7 permet de se ramener à ce cas par récurrence; on a donc la conclusion en général.

On vient donc de prouver 1) et la compatibilité de la domination ou de l'opposition avec le parallélisme. La symétrie de l'opposition est claire.

Pour la dernière assertion de 2), on peut donc remplacer $\mathfrak{f}$ (ou $\mathfrak{f}'$) par une face de quartier parallèle $\mathfrak{f}_1$ (ou $\mathfrak{f}'_1$) de même origine et dans un même appartement que $\mathfrak{f}'$ (ou $\mathfrak{f}$) et alors les équivalences annoncées sont claires. La preuve de la transitivité de la domination se ramène de même au cas facile de trois faces de quartier de même sommet. On a également $\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{f}' \Leftrightarrow \mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}' \geq \mathfrak{f}$; d'où la preuve complète de 2).

Pour les deux dernières assertions de 3), si $\mathfrak{f}$ *opp* $\mathfrak{f}' \geq \mathfrak{f}''$ (resp. $\mathfrak{f}$ *opp* $\mathfrak{f}'' \leq \mathfrak{f}'$), on peut supposer $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ dans un même appartement A puis, quitte à raccourcir $\mathfrak{f}'$, remplacer $\mathfrak{f}''$ par une face de quartier parallèle, de même sommet et dans un même appartement que $\mathfrak{f}'$. On a alors $\mathfrak{f}'' \subset \overline{\mathfrak{f}'}$ et les trois faces de quartier sont dans un même appartement. Les résultats annoncés sont alors évidents. □

3.3. Conséquences

1) La classe d'équivalence d'une face de quartier sphérique $\mathfrak{f}$ de germe $\mathfrak{F}$ est appelée sa *direction* $\mathfrak{f}^\infty = \mathfrak{F}^\infty$. La *direction* d'une cheminée (ou d'un germe de cheminée) évasée est la direction d'un germe de face de quartier de dimension maximale qu'il contient. Ces notions coïncident avec les notions de direction dans un appartement.

Les directions de faces de quartier sphériques, aussi appelées *facettes à l'infini*, forment un ensemble $\mathcal{I}^\infty$ réunion de deux sous-ensembles : $\mathcal{I}^{+\infty}$ (resp. $\mathcal{I}^{-\infty}$) est l'ensemble des directions de faces de quartier sphériques positives (resp. négatives). Ces deux sous-ensembles sont confondus dans le cas fini et disjoints dans les autres cas.

On notera que la masure $\mathcal{I}_\mathbb{R}$ (*cf.* 2.3.2) fournit les mêmes ensembles de facettes à l'infini : $\mathcal{I}_\mathbb{R}^\infty = \mathcal{I}^\infty$ et $\mathcal{I}_\mathbb{R}^{\pm\infty} = \mathcal{I}^{\pm\infty}$.

2) La domination induit un ordre (partiel) sur $\mathcal{I}^\infty$, qui ne mélange pas $\mathcal{I}^{+\infty}$ et $\mathcal{I}^{-\infty}$ (s'ils sont disjoints). La face $\mathfrak{f}$ est un quartier (resp. une cloison de quartier) si et seulement si $\mathfrak{f}^\infty$ est maximale (resp. maximale parmi les facettes à l'infini non maximales) ; on dit alors que $\mathfrak{f}^\infty$ est une *chambre à l'infini* (resp. *cloison à l'infini*).

3) À un appartement A on associe *l'appartement à l'infini* $A^\infty = A^{+\infty} \cup A^{-\infty}$, où $A^{+\infty}$ (resp. $A^{-\infty}$) est l'ensemble des classes de faces de quartier sphériques

positives (resp.négatives) dont un représentant est dans A. Par définition des relations, $A^{+\infty}$ (resp. $A^{-\infty}$) est isomorphe à l'ensemble ordonné des facettes vectorielles sphériques positives (resp. négatives) de $V(A)$ *i.e.* de $\mathcal{T}^\circ(A)$ (resp. $-\mathcal{T}^\circ(A)$). Par ces isomorphismes l'opposition correspond à $F^v \mapsto -F^v$ et induit donc une bijection croissante de $A^{+\infty}$ sur $A^{-\infty}$.

Il n'est pas clair (pour l'instant, *cf.* 3.9) que l'application $A \mapsto A^{+\infty}$ ou $A \mapsto A^{-\infty}$ soit injective; par contre $A \mapsto A^{\infty}$ l'est (par convexité).

4) Si M est un mur (resp. D est un demi-appartement) de l'appartement A de $\mathcal{I}$, l'ensemble M^∞ (resp. D^∞) des classes de faces de quartier sphériques dont un représentant est dans M (resp. D) est, par définition, un *mur* (resp. *demi-appartement*) *à l'infini* (dans A^∞) appelé *direction* de M (resp. D). De même $M^{\pm\infty} = M^\infty \cap \mathcal{I}^{\pm\infty}$ (resp. $D^{\pm\infty} = D^\infty \cap \mathcal{I}^{\pm\infty}$) est un *mur* (resp. un *demi-appartement*) dans $A^{\pm\infty}$. Deux murs parallèles (resp. deux demi-appartements inclus l'un dans l'autre) donnent le même mur (resp. demi-appartement) à l'infini. On peut parler de M^∞ et D^∞ même pour M et D fantômes (1.6.1).

Si $M = M(\alpha, k)$ (resp. $D = D(\alpha, k)$), $M^{\pm\infty}$ (resp. $D^{\pm\infty}$) s'identifie au "mur" $\pm\mathcal{T}^\circ(A) \cap Ker(\alpha)$ (resp. au "demi-appartement" $\pm\mathcal{T}^\circ(A) \cap D(\alpha)$) dans $\pm\mathcal{T}^\circ(A) \subset V(A)$.

Théorème 3.4. *L'ensemble $\mathcal{I}^{+\infty}$ muni de sa relation d'ordre et de l'ensemble $\mathcal{A}^{+\infty}$ de ses appartements à l'infini $A^{+\infty}$ (pour $A \in \mathcal{A}$) est un immeuble combinatoire de type W^v. Si la masure $\mathcal{I}$ est épaisse, alors l'immeuble $\mathcal{I}^{+\infty}$ est épais.*

Remarques. a) On a le même résultat avec $-\infty$.

b) À proprement parler $\mathcal{I}^{+\infty}$ n'est pas un complexe simplicial puisque dans l'adhérence d'un quartier on ne garde que les faces sphériques. On a cependant bien toutes les chambres et cloisons du complexe. Il paraît donc opportun d'adopter (ci-dessous) le langage des systèmes de chambres.

c) D'après la dernière assertion de 3.3.1 et la remarque 2.3.2, l'immeuble $\mathcal{I}^{+\infty}$ peut être épais sans que $\mathcal{I}$ le soit. De plus, comme il y a une infinité de murs parallèles, la démonstration ci-dessous prouve que, quand $\mathcal{I}$ est épaisse, une cloison à l'infini est dominée par une infinité de chambres à l'infini.

d) D'après 2.7.2 une rétraction ρ de centre un germe de cheminée évasée pleine positive $\mathfrak{R}$ est compatible avec le parallélisme et est donc définie sur $\mathcal{I}^{\pm\infty}$. Si $\mathfrak{R}$ est un germe de quartier, cette rétraction coïncide sur $\mathcal{I}^{+\infty}$ avec celle déduite de sa structure d'immeuble et sur $\mathcal{I}^{-\infty}$ avec celle déduite de la structure d'immeuble jumelé sur $\mathcal{I}^{\infty}$, *cf.* 3.7.

e) L'ensemble des classes de parallélisme de demi-droites positives génériques est une réalisation géométrique de $\mathcal{I}^{+\infty}$: à $(x+F^v)^\infty$ on associe l'ensemble des directions des demi-droites $x+\mathbb{R}_+\xi$ pour $\xi \in F^v$.

Démonstration.

Vérifions les axiomes des immeubles comme énoncés en 2.2.6 ou, de manière plus appropriée aux immeubles combinatoires, dans [6 ; 4.1] ou [24 ; 2.4.1]. Chaque appartement $A^{+\infty}$ est le complexe de Coxeter associé à W^v, puisqu'il est isomorphe à l'ensemble ordonné des facettes (sphériques) de $\mathcal{T}^\circ(A)$, d'où (I0). Les axiomes (I1) et (I2) sont des conséquences immédiates des axiomes (MA3) et (MA4).

Soit $\mathfrak{f}^\infty$ une cloison de $\mathcal{I}^{+\infty}$ et $\mathfrak{f} = x + F^v$ une cloison de quartier de $\mathcal{I}$ correspondante. On peut supposer que $\mathfrak{f}$ a pour support un (vrai) mur M d'un appartement A_1. Si la masure $\mathcal{I}$ est épaisse, on a construit en 2.10 un second appartement A_2 tel que $D = A_1 \cap A_2$ est l'un des deux demi-appartements de A_1 bordés par M. Notons $\mathfrak{q}$ (resp $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$) le quartier de D (resp. $A_1 \setminus D$, $A_2 \setminus D$) de sommet x contenant $\mathfrak{f}$ dans son adhérence ; $\mathfrak{f}^\infty$ est bien dominée par les chambres à l'infini $\mathfrak{q}^\infty$, $\mathfrak{q}_1^\infty$ et $\mathfrak{q}_2^\infty$. Si $\mathfrak{f}' = x - F^v$, on a $cl(\mathfrak{F}' \cup \mathfrak{Q}) = D$, $cl(\mathfrak{F}' \cup \mathfrak{Q}_1) = \overline{A_1 \setminus D}$ et $cl(\mathfrak{F}' \cup \mathfrak{Q}_2) = \overline{A_2 \setminus D}$; donc les trois chambres à l'infini $\mathfrak{q}^\infty$, $\mathfrak{q}_1^\infty$ et $\mathfrak{q}_2^\infty$ sont bien distinctes. □

3.5. W^v−distance

W^v est le groupe de Weyl vectoriel de $\mathbb{A}$; son système de générateurs canonique S est associé à la chambre fondamentale C_f^v de $\mathbb{A}$. La W^v−distance sur les chambres vectorielles de $\mathbb{A}$ est donc donnée par $d_+^{\mathbb{A}}(wC_f^v, w'C_f^v) = w^{-1}w'$, elle est invariante par l'action de W^v. On a $d_+^{\mathbb{A}}(C_1^v, C_2^v) \in S \cup \{1\}$ si et seulement si C_1^v et C_2^v sont adjacentes *i.e.* dominent une même cloison vectorielle.

Soient $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ deux germes de quartiers positifs et A un appartement les contenant ; on note $\mathfrak{Q}_i = germ_\infty(x + C_i^v)$ dans A. Si $f \in Isom(\mathbb{A}, A)$, on définit $d_+^A(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = d_+^{\mathbb{A}}(f^{-1}(C_1^v), f^{-1}(C_2^v))$; un autre choix de f est de la forme $f \circ$

w pour $w \in W^v$, donc $d_+^{\mathbb{A}}(w^{-1}f^{-1}(C_1^v), w^{-1}f^{-1}(C_2^v)) = d_+^{\mathbb{A}}(f^{-1}(C_1^v), f^{-1}(C_2^v))$, ainsi d_+^A ne dépend pas du choix de f. Par ailleurs deux choix de A diffèrent par un isomorphisme fixant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$, donc $d_+^A(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ ne dépend pas de A ; c'est la W^v-*distance* $d_+(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ de $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ dans $\mathcal{I}^{+\infty}$.

Comme cette W^v-distance est associée à un immeuble, elle vérifie les axiomes des W^v-distances, *cf.* [24 ; 2.3] ou [2 ; 5.1.1]. La vérification directe est facile et laissée au lecteur : le premier axiome est clair ; pour le troisième il suffit de choisir les germes de quartier x, y et z dans le même appartement ; quant au second on peut s'inspirer de la démonstration de 3.7 ci-dessous.

On a bien sûr les mêmes résultats dans $\mathcal{I}^{-\infty}$: pour des germes de quartiers négatifs et avec les notations ci-dessus on pose: $d_-(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = d_+^{\mathbb{A}}(-f^{-1}(C_1^v), -f^{-1}(C_2^v))$.

3.6. Codistance

Soient $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ deux germes de quartier de signes opposés (ε_1 et $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$), A un appartement les contenant et $f \in Isom(\mathbb{A}, A)$; on note $\mathfrak{Q}_i = germ_\infty(x + C_i^v)$ dans A et $f^{-1}(C_i^v) = \varepsilon_i w_i C_f^v$ pour $w_i \in W^v$.

On définit alors $\qquad d_*(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = d_{\varepsilon_1}(C_1^v, -C_2^v) = d_{\varepsilon_2}(-C_1^v, C_2^v) = w_1^{-1}w_2.$

Pour les mêmes raisons qu'en 3.5, cette définition ne dépend pas des choix effectués ; on dit que d_* est la *codistance* dans $\mathcal{I}^\infty$.

Deux germes de quartiers (de signes différents) sont opposés dans $\mathcal{I}$ si et seulement si leur codistance est 1. Deux germes de faces de quartier sphériques $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont opposés si et seulement si, pour tout germe de quartier $\mathfrak{Q}$ dominant $\mathfrak{F}$, il existe un germe de quartier $\mathfrak{Q}'$ opposé à $\mathfrak{Q}$ dominant $\mathfrak{F}'$ et inversement en échangeant $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$. On peut donc traduire l'opposition par des codistances.

Cas fini: Supposons W^v fini et notons w_0 son élément de plus grande longueur. Alors $\mathcal{I}^{+\infty} = \mathcal{I}^{-\infty} = \mathcal{I}^\infty$ est un immeuble sphérique et on retrouve donc bien le classique immeuble sphérique à l'infini de l'immeuble affine $\mathcal{I}$.

On a défini trois "distances" sur l'ensemble des germes de quartiers. Pour tous germes de quartiers $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ on a: $d_-(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = w_0 d_+(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) w_0$ et $d_*(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = w_0 d_+(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$ (resp. $d_+(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) w_0$) si on considère $\mathfrak{Q}_1$ dans $\mathcal{I}^{-\infty}$ et $\mathfrak{Q}_2$ dans $\mathcal{I}^{+\infty}$ (resp. l'inverse). On retrouve les formules de [37 ; prop.1] corrigées par l'échange de w_0d_+ et d_+w_0 dans celles-ci (remarque également faite dans [2 ; 5.136]) ; ainsi dans ce cas d_* est le jumelage naturel de $\mathcal{I}^\infty$ avec lui-même.

Le théorème qui va suivre est donc une généralisation naturelle de ce cas connu. À l'infini de la masure affine on trouve un immeuble jumelé à la place de l'immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine.

Théorème 3.7. *La codistance d_* définit un jumelage des immeubles $(\mathcal{I}^{+\infty}, d_+)$ et $(\mathcal{I}^{-\infty}, d_-)$.*

Démonstration.

Le premier axiome des jumelages (*cf.* [37 ; 2.2], [24 ; 2.5.1] ou [2 ; 5.8.1]) est clairement vérifié. Le troisième est aussi facile : il suffit de choisir tous les germes de quartier dans un même appartement. Pour le second, soient $\mathfrak{Q}_1 \in \mathcal{I}^{-\infty}$ et $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3 \in \mathcal{I}^{+\infty}$ des germes de quartier tels que: $d_*(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = w \in W^v$ et $d_+(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) = s \in S$, avec $\ell(ws) = \ell(w) - 1$. Soit A un appartement contenant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$; on note $\mathfrak{Q}_1 = germ_\infty(x + C_1^v)$ et $\mathfrak{Q}_2 = germ_\infty(x + C_2^v)$ dans A. On choisit une isométrie de $\mathbb{A}$ sur A qui identifie C_f^v avec $-C_1^v$ et donc C_2^v avec wC_f^v. Comme $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, le mur M^v support de la cloison F^v de C_2^v de type $\{s\}$ sépare C_2^v de $C_f^v = -C_1^v$. Ainsi C_1^v et C_2^v sont du même côté de M^v dans A et $C_2^v \subset cl(C_1^v \cup F^v)$: tout appartement contenant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{F} = germ_\infty(x + F^v)$ contient $\mathfrak{Q}_2$. Grâce à la proposition 2.7 on voit facilement que c'est encore vrai si on remplace $\mathfrak{F}$ par un germe de cloison de quartier parallèle. Mais $d_+(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) = s$, donc les cloisons de type $\{s\}$ de deux quartiers quelconques $\mathfrak{q}_2$ et $\mathfrak{q}_3$, de germes $\mathfrak{Q}_2$ et $\mathfrak{Q}_3$, sont parallèles. Ainsi tout appartement A' contenant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_3$ contient $\mathfrak{Q}_2$; dans cet appartement le calcul des codistances et distances est facile et donne le résultat attendu : $d_*(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_3) = ws$. □

3.8. Conséquences On suppose la masure $\mathcal{I}$ épaisse.

1) La construction d'un immeuble (combinatoire) épais $\mathcal{I}^{\pm\infty}$ de type W^v implique des limitations sur W^v. Si $J \subset I$, on sait construire à partir de $\mathcal{I}^{\pm\infty}$ un résidu qui est un immeuble épais de type $W^v(J)$ [25 ; III 3.5]. Les limitations connues sur les groupes de Coxeter des immeubles épais sphériques (*cf.* [32 ; addenda], [38 ; 40.3 et 40.22] ou [39 ; sect. 12.3]) montrent donc que le diagramme de Coxeter de W^v ne peut contenir de sous-diagramme de type H_3 ou H_4. Par contre il n'y a, a priori, pas de limitation sur les coefficients de la matrice de Coxeter de W^v, *cf.* [25 ; exercice 3.21].

2) D'après [37 ; 5.6 cor. 3] et [22 ; (4) p 73], le jumelage entre $\mathcal{I}^{+\infty}$ et $\mathcal{I}^{-\infty}$ montre que, si tous les coefficients de la matrice de Coxeter sont finis (cas $2-$sphérique), tous les $2-$résidus (sauf peut-être ceux facteurs directs) sont de Moufang et infinis (3.4c). On obtient alors plus de limitations sur W^v: d'après [32 ; addenda] et [38 ; 17.1] les coefficients de la matrice de Coxeter de W^v ne peuvent être que 1, 2, 3, 4, 6 ou 8 (puisqu'on a exclu ∞), si l'on suppose de plus toute composante connexe du diagramme de Coxeter de cardinal au moins 3 (voir aussi [2 ; 8.29 et 5.212]). Cela ne diffère donc du cas Kac-Moody que par la possibilité du nombre 8.

On peut améliorer légèrement ce résultat. Il est clair que deux résidus opposés de $\mathcal{I}^\infty$ de type $J \subset I$ (*cf.* [20 ; 6 p 135]) forment un immeuble jumelé de type $W^v(J)$. Ainsi tous les sous-diagrammes (du diagramme de Coxeter de W^v) connexes, à 3 sommets et sans coefficient ∞ ne comportent que les coefficients 3, 4, 6 ou 8.

3) Si le diagramme de Coxeter de W^v est connexe, sans coefficient ∞ et si $|I| \geq 3$, on sait donc que tous les $2-$résidus de $\mathcal{I}^{\pm\infty}$ sont de Moufang et infinis. L'immeuble jumelé $\mathcal{I}^\infty$ est alors lui-même de Moufang [2 ; 8.27 et 5.212]. D'après [37 ; 4.3 prop. 7] ou [2 ; 8.47] il existe alors un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{I}^\infty$ qui est muni d'une donnée radicielle "jumelée" de type W^v (qui généralise la notion de donnée radicielle de type Φ de [28 ; 1.4] déjà signalée en 2.4.2). De plus cette donnée radicielle détermine entièrement l'immeuble jumelé $\mathcal{I}^\infty$ [36 ; 8.1].

La classification des immeubles jumelés épais de Moufang est assez largement connue dans le cas $2-$sphérique (*i.e.* quand tous les coefficients de la matrice de Coxeter de W^v sont finis): *cf.* [37], [22], [21], [20] et [2 ; 9.12].

3.9. Appartements jumelés

Les appartements *admissibles* de $(\mathcal{I}^{\pm\infty}, d_\pm)$ ou les appartements *jumelés* de $(\mathcal{I}^\infty, d_\pm, d_*)$ sont associés aux paires de chambres à l'infini (*i.e.* de germes de quartier) opposées, *cf.* [24 ; 2.5.2]. Si on note A l'appartement (unique) contenant deux germes de quartier opposés $\mathfrak{Q}^+$ et $\mathfrak{Q}^-$, le lemme 3.10 suivant, comparé à la définition de *l.c.* , dit que les appartements admissibles (resp. l'appartement jumelé) associés à $\mathfrak{Q}^+$ et $\mathfrak{Q}^-$ sont $A^{\pm\infty}$ (resp. $A^\infty = A^{+\infty} \cup A^{-\infty}$).

Inversement tout appartement $A \in \mathcal{A}$ est l'enveloppe convexe de deux germes de quartier opposés $\mathfrak{Q}^+$ et $\mathfrak{Q}^-$; donc $A^{\pm\infty}$ est un appartement admissible de $\mathcal{I}^{\pm\infty}$ et A^∞ un appartement jumelé de $\mathcal{I}^\infty$. D'après [1 ; lemme 2iv p.24] l'appartement admissible $A^{+\infty}$ (resp. $A^{-\infty}$) détermine entièrement son jumeau $A^{-\infty}$ (resp. $A^{+\infty}$). On a donc des bijections canoniques entre l'ensemble $\mathcal{A}$ des appartements de $\mathcal{I}$, les ensembles $\mathcal{A}^{\pm\infty}$ d'appartements de $\mathcal{I}^{\pm\infty}$ et l'ensemble $\mathcal{A}^*$ des appartements jumelés de $\mathcal{I}^\infty$. Voir aussi [2 ; 5.179 et 5.180].

Lemme 3.10. *Soient $\mathfrak{Q}^+ \in \mathcal{I}^{+\infty}$, $\mathfrak{Q}^- \in \mathcal{I}^{-\infty}$ deux germes de quartier opposés et A un appartement les contenant. Pour tout germe de quartier positif $\mathfrak{Q}'$, on a :*

$d_+(\mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}') = d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}')$ si et seulement si $\mathfrak{Q}'$ est contenu dans A.

Démonstration. Si $\mathfrak{Q}' \subset A$, la relation est évidente par construction. Supposons inversement que $d_+(\mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}') = d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}') = w$. Soit $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}'$ une galerie minimale de germes de quartiers dans $\mathcal{I}^{+\infty}$ (donc $n = \ell(w)$). Si $\mathfrak{Q}' \not\subset A$, soit i le plus petit entier tel que $\mathfrak{Q}_i \subset A$ et $\mathfrak{Q}_{i+1} \not\subset A$. La rétraction $\rho = \rho_{A,\mathfrak{Q}^-}$ conserve les codistances à $\mathfrak{Q}^-$ donc $d_*(\mathfrak{Q}^-, \rho(\mathfrak{Q}')) = w$. Par ailleurs, si $\{s\}$ est le type du germe de cloison de quartier $\mathfrak{F}$ dominé par $\mathfrak{Q}_i$ et $\mathfrak{Q}_{i+1}$ et si $\mathfrak{Q}'_{i+1}$ est le germe de quartier de A adjacent à $\mathfrak{Q}_i$ le long de $\mathfrak{F}$, on a $d_+(\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_{i+1}) = d_+(\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}'_{i+1}) = d_+(\mathfrak{Q}'_{i+1}, \mathfrak{Q}_{i+1}) = s$; $d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}_i) = d_+(\mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}_i) = w_i \in W^v$; $d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}'_{i+1}) = d_+(\mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}'_{i+1}) = d_+(\mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}_{i+1}) = w_i s$ et$\ell(w_i s) > \ell(w_i) = \ell(w_i ss)$. Le second axiome des jumelages nous dit alors que $d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}_{i+1}) = w_i$; donc $d_*(\mathfrak{Q}^-, \rho\mathfrak{Q}_{i+1}) = w_i = d_*(\mathfrak{Q}^-, \mathfrak{Q}_i)$ et $\rho\mathfrak{Q}_{i+1} = \mathfrak{Q}_i$. La galerie $\rho\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}^+, \rho\mathfrak{Q}_1, \ldots, \rho\mathfrak{Q}_n = \rho\mathfrak{Q}'$ bégaye donc et ainsi $d_+(\mathfrak{Q}^+, \rho\mathfrak{Q}')$ a une longueur strictement inférieure à n, longueur de $d_*(\mathfrak{Q}^-, \rho\mathfrak{Q}')$; ceci est impossible dans l'appartement A. □

4. Immeubles microaffines et arbres à l'infini

On considère toujours une masure affine $\mathcal{I}$.

4.1. L'appartement témoin $\mathbb{A}_J$

Soit $J \subset I$. Le quadruplet $(V, W^v(J), (\alpha_i)_{i\in J}, (\alpha_i^\vee)_{i\in J})$ satisfait aux conditions de 1.1. Son système de racines est $\Phi_J = \Phi \cap (\bigoplus_{i\in J} \mathbb{R}\alpha_i) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(F^v(J)) = \{0\}\ \} = W^v(J).\{\alpha_i \mid i \in J\ \}$. On note $V_J = \bigcap_{i\in J}\ Ker(\alpha_i)$ le support de la facette $F^v(J)$.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}^J$ (resp. $\mathcal{M}_i^J$) des hyperplans de $\mathcal{M}$ dont la direction est de la forme $Ker(\alpha)$ avec $\alpha \in \Phi_J$ (resp. $\alpha \in \Delta_{im}$ et $\alpha(F^v(J)) = \{0\}$) ; ils définissent une structure d'appartement affine (modérément imaginaire) sur $\mathbb{A}$ associée à $(V, W^v(J), (\alpha_i)_{i\in J}, (\alpha_i^\vee)_{i\in J})$. Tous ces hyperplans sont stables par translation par V_J. Ainsi $\mathbb{A}_J = \mathbb{A}/V_J$ est muni de systèmes $\mathcal{M}_J$ et $\mathcal{M}_J^i$ d'hyperplans (en bijection avec $\mathcal{M}^J$ et $\mathcal{M}_i^J$) qui en font un appartement affine essentiel (modérément imaginaire) de groupe de Weyl vectoriel $W^v(J)$.

Le groupe $W^J = W^v(J) \ltimes Q^\vee \subset W$ stabilise $\mathcal{M}^J$ et commute à V_J. Il induit donc un groupe de transformations affines de $\mathbb{A}_J$ qui contient le groupe de Weyl W_J de cet appartement (et est contenu dans le groupe $(W_J)_{P_J}$ correspondant).

L'ensemble $\mathbb{A}(F^v(J))$ des germes de faces de quartier de $\mathbb{A}$ de direction $F^v(J)$ s'identifie de manière W^J-équivariante à $\mathbb{A}_J$. Un germe de cheminée $\mathfrak{R}$ de $\mathbb{A}$ de direction dominant $F^v(J)$ définit un filtre de parties de $\mathbb{A}_J$ dont une base est obtenue comme suit : à un élément du filtre $\mathfrak{R}$ on associe l'ensemble des $\mathfrak{F} \in \mathbb{A}(F^v(J)) = \mathbb{A}_J$ contenus dans cet élément. Ce filtre est un germe de cheminée de $\mathbb{A}_J$; si $\mathfrak{R}$ a pour direction $F^v(J)$ c'est une facette-fermée de $\mathbb{A}_J$ et toutes les facettes-fermées sont ainsi obtenues. De même un germe de face de quartier $\mathfrak{F}$ de direction dominant $F^v(J)$ définit un germe de face de quartier (ou un point) de $\mathbb{A}_J$.

On s'intéressera essentiellement au cas J sphérique. Alors $W^v(J)$ et Φ_J sont finis et il n'y a pas de racine imaginaire pour $\mathbb{A}_J$ ou $\mathbb{A}^J$; de plus $\mathbb{A}_J$ possède un produit scalaire $W^v(J)-$invariant qui en fait un appartement au sens de [29]. Si l'appartement $\mathbb{A}$ est semi-discret, l'appartement $\mathbb{A}_J$ est discret.

Plus généralement on définit les ensembles $\mathbb{A}(F^v)$ et $\mathbb{A}_{F^v}$ (en bijection canonique avec $\mathbb{A}_J$) pour une facette vectorielle F^v de type J à la place de $F^v(J)$. On dit que $\mathbb{A}(F^v)$ est la *façade* de $\mathbb{A}$ *dans la direction* F^v, *cf.* [8, 9].

4.2. L'ensemble $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$

Soit $\mathfrak{F}^\infty$ une direction de face de quartier sphérique (par exemple positive) de type J. On note $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ l'ensemble des germes de faces de quartier $\mathfrak{F}$ dans cette direction.

Soit $\mathfrak{f} = x + F^v \subset A$ un représentant d'un $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$. On choisit un isomorphisme $\varphi \in Isom(\mathbb{A}, A)$ tel que $\varphi^{-1}(F^v) = F^v(J)$. L'ensemble $A(\mathfrak{F}^\infty)$ des éléments de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ contenus dans A est identifié par φ avec $\mathbb{A}(F^v(J))$ et donc avec $\mathbb{A}_J$.

Soit $\mathfrak{R}$ un germe de cheminée de $\mathcal{I}$ de direction dominant $\mathfrak{F}^\infty$ (donc évasée) ; considérons un appartement A contenant $\mathfrak{R}$. Comme en 4.1 ci-dessus, on peut associer à $\mathfrak{R}$ un filtre de parties de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ (noté $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$) contenu dans $A(\mathfrak{F}^\infty)$ mais indépendant du choix de A. En choisissant φ comme ci-dessus, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$ s'identifie à une cheminée de l'appartement $\mathbb{A}_J$; si la direction de $\mathfrak{R}$ est $\mathfrak{F}^\infty$ alors $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$ s'identifie à une facette de $\mathbb{A}_J$.

Remarque. Si J n'est pas sphérique, la direction d'une face de quartier $\mathfrak{f}$ de type J n'a pas été définie ; il est donc a priori plus difficile de définir $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ qui devrait être une masure affine.

Proposition 4.3. *L'ensemble $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ muni de ses facettes $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$ (pour les germes de cheminées (évasées) $\mathfrak{R}$ de direction $\mathfrak{F}^\infty$) et de ses appartements $A(\mathfrak{F}^\infty)$ (pour $A \in \mathcal{A}$ contenant un $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$) est un immeuble affine de type $\mathbb{A}_J$ (au sens de [29], cf. 2.2.6). Cet immeuble est la façade de $\mathcal{I}$ dans la direction $\mathcal{F}^\infty$.*

Remarque. Dans le cas fini et si $\mathfrak{F}^\infty$ est la direction de face de quartier minimale (*i.e.* de type $J = I$), alors $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est l'essentialisé $\mathcal{I}^e$ de l'immeuble $\mathcal{I}$, c'est à dire son quotient par V_0.

Démonstration. On a vu ci-dessus que les appartements avec leurs facettes sont isomorphes à $\mathbb{A}_J$; d'où (I0). D'après l'axiome (MA3) deux facettes $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$ et $\mathfrak{R}'_{\mathfrak{F}^\infty}$ sont dans un même appartement $A(\mathfrak{F}^\infty)$, d'où (I1) ; et l'axiome (MA4) dit que cet appartement est unique à un isomorphisme fixant ces deux facettes près. De plus l'intersection de deux appartements est une union de facettes d'après l'axiome (MA2) ; d'où (I2). $\square$

4.4. L'achèvement de Satake de la masure $\mathcal{I}$

On note $\mathcal{I}^{\mu+}$ (resp. $\mathcal{I}^{\mu-}$) la réunion (disjointe) des $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ pour les directions de faces de quartier sphériques positives (resp. négatives) $\mathfrak{F}^\infty$. Ainsi $\mathcal{I}^{\mu+}$ (resp. $\mathcal{I}^{\mu-}$) est l'ensemble des germes de faces de quartier sphériques positives (resp. négatives) de $\mathcal{I}$.

L'*achèvement de Satake* $\mathcal{I}^{sat}$ de $\mathcal{I}$ est la réunion de $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^{\mu+}$ et $\mathcal{I}^{\mu-}$. Dans le cas fini $\mathcal{I}^{\mu+} = \mathcal{I}^{\mu-}$ contient $\mathcal{I}^e$, on se limite au cas essentiel et alors $\mathcal{I}^{sat} = \mathcal{I}^{\mu+} =$

$\mathcal{I}^{\mu-}$. En dehors du cas fini la réunion est disjointe mais cet achèvement semble inachevé, on aimerait lui adjoindre des masures $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ pour $\mathfrak{F}^\infty$ non sphérique, voir [9].

$\mathcal{I}^{sat}$ est réunion d'appartements $A^{sat} = A \cup A^{\mu+} \cup A^{\mu-}$ (pour $A \in \mathcal{A}$) où $A^{\mu\pm}$ est l'ensemble des germes de faces de quartier sphériques de A, positives ou négatives. L'appartement $A^{\mu+}$ est isomorphe à la réunion disjointe $\mathbb{A}^{\mu+}$ des $\mathbb{A}_{F^v}$ pour F^v facette vectorielle sphérique positive de V. En fait $\mathbb{A}^{\mu+}$ est l'appartement témoin de l'immeuble microaffine de [28] dans sa réalisation de Satake (*i.e.* $\mathbb{A}^{\mu+} = \mathbb{A}^s$, *cf.* [*l.c.* ; 4.2.1]).

À un germe de cheminée évasée $\mathfrak{R}$ on associe une facette $\mathfrak{R}^\mu$ située dans $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ où $\mathfrak{F}^\infty$ est la direction de $\mathfrak{R}$. Si $\mathfrak{R}$ est dans un appartement A, un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur A identifie $\mathfrak{R}^\mu$ à une facette F^s de $\mathbb{A}^s$ (*cf.* [*l.c.* ; 4.2.1]).

On peut donc dire que $\mathcal{I}^{\mu+}$ muni de ses appartements $A^{\mu+}$ (pour $A \in \mathcal{A}$) et de ses facettes $\mathfrak{R}^\mu$ (pour $\mathfrak{R}$ germe de cheminée évasée positive) est un *immeuble microaffine* de type $\mathbb{A}^{\mu+}$ (*i.e.* au sens de la réalisation de Satake). Aucune définition abstraite n'a été donnée dans *l.c.* , mais on a les propriétés habituelles suivantes : les appartements sont isomorphes à $\mathbb{A}^{\mu+}$, deux facettes $\mathfrak{R}_1^\mu$ et $\mathfrak{R}_2^\mu$ sont contenues dans un même appartement (*cf.* (MA3)) et si deux appartements contiennent $\mathfrak{R}_1^\mu$ et $\mathfrak{R}_2^\mu$, ils sont isomorphes par un isomorphisme fixant ces deux facettes (*cf.* (MA4)).

Dans le cas fini, $\mathcal{I}^{\mu+}$ est l'achèvement de Satake ou achèvement polyédral de l'immeuble (essentiel) $\mathcal{I}$ [28 ; 4.3]. On va le munir d'une topologie qui en fait une compactification de $\mathcal{I}$, si ce dernier est localement fini.

4.5. Topologies sur les immeubles microaffines

Pour $A \in \mathcal{A}$, l'appartement microaffine $A^{\mu+}$ est muni d'une topologie [28 ; 4.2.4] qui est compacte dans le cas fini. On peut même définir cette topologie sur $A^{\mu-} \cup A \cup A^{\mu+}$ (quand W^v n'a pas de facteur direct fini).

On va "recoller" ces topologies sur les appartements en deux topologies distinctes sur $\mathcal{I}^{\mu+}$. Pour $\mathfrak{F} \in \mathcal{I}^{\mu+}$, on doit définir une base de voisinages de $\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{I}^{\mu+}$; on va même définir des voisinages dans la réunion disjointe de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}^{\mu+}$.

Soit $\mathfrak{f} = x + F^v$ un représentant de $\mathfrak{F}$ contenu dans un appartement A. Le sous-groupe $W^v_{F^v}$ de $W^v(A)$ fixant F^v est fini, il existe donc une base de voisinages ouverts de 0 dans V_A stables par $W^v_{F^v}$. Pour un tel voisinage ouvert U et un $\xi \in F^v$, l'ensemble $x+\xi+U+F^v$ est un voisinage ouvert dans A de l'adhérence du raccourci $x+\xi+F^v$ de $\mathfrak{f}$; on note $\Omega_{A,U,\xi}$ la réunion de cet ensemble et des $\mathfrak{F}' \in A^{\mu+}$ qui sont contenus dedans. Si maintenant A' est un appartement contenant $germ_{x+\xi}(x+\xi+F^v)$, il existe un isomorphisme φ de A sur A' fixant $germ_{x+\xi}(x+\xi+F^v)$ qui est unique à $W^v_{F^v}$ près (au maximum) ; ainsi $\varphi(\Omega_{A,U,\xi})$ ne dépend pas du choix de φ, on le note $\Omega_{A',U,\xi}$.

La base de voisinages de $\mathfrak{F}$ pour la *topologie forte* (resp. *faible*) est formée d'ensembles indexés par ξ, U comme ci-dessus, chaque ensemble étant la réunion des $\Omega_{A',U,\xi}$ pour A' un appartement contenant $x+\xi+F^v$ (resp. $germ_{x+\xi}(x+\xi+F^v)$). On note $\mathcal{I}^{\mu+}_s$ (resp. $\mathcal{I}^{\mu+}_w$) l'espace $\mathcal{I}^{\mu+}$ muni de cette topologie.

Propriétés attendues. Les résultats suivants sont vraisemblables mais non démontrés ici car non utilisés dans la suite.

1) Pour les deux topologies les appartements sont fermés et munis de la topologie de [28 ; 4.2.4].

2) Pour $\mathfrak{F}^\infty \in \mathcal{I}^{+\infty}$ et pour les deux topologies, $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est muni de sa topologie naturelle d'immeuble affine euclidien, il est ouvert dans son adhérence qui est la réunion des $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty_1)$ pour $\mathfrak{F}^\infty_1 \geq \mathfrak{F}^\infty$.

3) L'ensemble des germes de quartier positifs est discret dans $\mathcal{I}^{\mu+}_s$ mais pas dans $\mathcal{I}^{\mu+}_w$.

4) Dans le cas classique et si $\mathcal{I}$ est localement fini, $\mathcal{I}^{\mu+}_w$ est la compactification de Satake de l'immeuble $\mathcal{I}$, *cf.* [18], [8].

4.6. L'arbre associé à une cloison à l'infini $\mathfrak{F}^\infty$

Dans la suite de ce paragraphe on va s'attacher à généraliser un certain nombre de résultats de [33]. L'un des ingrédients essentiels est l'arbre à l'infini associé à une cloison de $\mathcal{I}^{\pm\infty}$: si $\mathfrak{F}^\infty$ est une cloison à l'infini de $\mathcal{I}^{+\infty}$, c'est à dire une direction de cloison de quartier positive, l'immeuble affine $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est de dimension 1 (la codimension de $\mathfrak{F}^\infty$) donc un arbre.

On a suggéré en 4.5 que la frontière de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ (dans $\mathcal{I}^{\mu+}_s$ ou $\mathcal{I}^{\mu+}_w$) est formée des $\mathcal{I}(\mathfrak{Q}) = \{\mathfrak{Q}\}$ pour $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^\infty$ un germe de quartier dominant $\mathfrak{F}^\infty$. Si $\mathfrak{F}^\infty \in A^\infty$, la frontière de $A(\mathfrak{F}^\infty)$ est réduite à $A(\mathfrak{Q}_1^\infty) \cup A(\mathfrak{Q}_2^\infty) = \{\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2\}$, où $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont les deux germes de quartier de A dominant $\mathfrak{F}^\infty$.

Indépendamment de ces résultats, il est facile de voir que $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ déterminent les deux bouts de l'appartement $A(\mathfrak{F}^\infty)$ de l'arbre $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$: si $\mathfrak{q}_i = x + C_i^v \subset A$ est un quartier de germe $\mathfrak{Q}_i$, l'ensemble des germes de cloison de quartier de A de direction $\mathfrak{F}^\infty$ et contenus dans $\mathfrak{q}_i$ est une demi-droite δ_i^x de la droite $A(\mathfrak{F}^\infty)$ et les demi-droites δ_1^x, δ_2^x sont opposées.

Ainsi $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est un arbre (discret ou non) muni d'un système d'appartements dont les bouts correspondent bijectivement aux germes de quartier de $\mathcal{I}$ dominant $\mathfrak{F}^\infty$. Ce système d'appartements satisfait aux conditions de [33] : deux bouts distincts sont toujours dans un même appartement (qu'ils déterminent entièrement).

Proposition 4.7. *1) Soient $x \in \mathcal{I}$ et $\mathfrak{F}^\infty \in \mathcal{I}^\infty$, il existe une et une seule face de quartier $\mathfrak{f}$ dans $\mathcal{I}$ de sommet x et direction $\mathfrak{F}^\infty$.*

2) Soient $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ deux faces de quartier sphériques dans $\mathcal{I}$ de même direction $\mathfrak{F}^\infty$. Leurs adhérences sont disjointes ou elles ont même germe. Si de plus elles ont même sommet, elles coïncident.

N.B. On généralise ainsi [33 ; prop. 5 et cor. 17.4].

Démonstration. 1) Soient $\mathfrak{F}'$ un germe de face de quartier de direction $\mathfrak{F}^\infty$ et A un appartement contenant x et $\mathfrak{F}'$. Dans A la face de quartier $\mathfrak{f}$ de sommet x, parallèle à $\mathfrak{F}'$ convient : en effet $\mathfrak{f}^\infty = \mathfrak{F}^\infty$. Si on a deux solutions $\mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}''$, la proposition 2.7 nous fournit une suite $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}', \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}''$ de germes de faces de quartier parallèles et des appartements $A_1, \ldots, A_n$ tels que A_i contienne x, $\mathfrak{F}_{i-1}$ et $\mathfrak{F}_i$. Tout appartement A_i' contenant x et $\mathfrak{F}_i$ contient une unique face de quartier de sommet x et direction $\mathfrak{F}^\infty = \mathfrak{F}_i^\infty$; celle-ci est dans l'enclos de x et $\mathfrak{F}_i$, donc ne dépend pas de A_i', on la note $\mathfrak{f}(\mathfrak{F}_i)$. Ainsi on a $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{f}(\mathfrak{F}_1) = \cdots = \mathfrak{f}(\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{f}''$.

2) Soit $x \in \overline{\mathfrak{f}_1} \cap \overline{\mathfrak{f}_2}$, les raccourcis de $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ de sommet x ont même direction et même sommet, elles sont donc égales d'après 1). Ainsi $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$. □

Proposition 4.8. *cf.* [33 ; 17.3]

1) Deux murs (éventuellement fantômes) de même direction M^∞ (cf. 3.3.4) sont des hyperplans parallèles d'un même appartement.

2) Soient M^∞ un mur de $\mathcal{I}^\infty$ et $\mathfrak{F}^\infty \subset M^\infty$ une cloison. Alors, pour tout germe de cloison de quartier $\mathfrak{F}$ de direction $\mathfrak{F}^\infty$, il existe un unique mur (éventuellement fantôme) $M_\mathfrak{F}$ de $\mathcal{I}$ de direction M^∞ contenant $\mathfrak{F}$. Ce mur est un vrai mur si l'enclos de $\mathfrak{F}$ est égal à son adhérence.

Remarque. Soient M^∞ un mur de $\mathcal{I}^\infty$ et $\mathfrak{F}^\infty \subset M^\infty$ une cloison. Alors, pour tout germe de cheminée $\mathfrak{R}$ de direction $\mathfrak{F}^\infty$ et pour toute cheminée assez petite $\mathfrak{r}$ de germe $\mathfrak{R}$, tous les murs $M_\mathfrak{F}$ (associés aux germes de cloisons de quartier $\mathfrak{F}$ de direction $\mathfrak{F}^\infty$ contenus dans $\mathfrak{r}$) sont contenus dans un même appartement (dans la démonstration ci-dessous de la partie 2 il suffit de prendre A contenant $\mathfrak{r}$ et un $\mathfrak{F}^-$ de direction $\mathfrak{F}^{-\infty}$). On note $\mathfrak{r} + M^\infty$ la réunion de ces murs. Quand $\mathfrak{r}$ varie, les $\mathfrak{r} + M^\infty$ engendrent un filtre $\mathfrak{R} + M^\infty$ de parties de $\mathcal{I}$ (contenu dans l'appartement A).

Démonstration. 1) Choisissons deux directions de cloison de quartier opposées $\mathfrak{F}^{+\infty}$ et $\mathfrak{F}^{-\infty}$ dans M^∞. Les murs M_1 et M_2 (de direction M^∞) contiennent donc des cloisons de quartier $\mathfrak{f}_i^\pm$ représentant ces directions. Soit A un appartement contenant les germes $\mathfrak{F}_1^-$ et $\mathfrak{F}_2^+$; il suffit de montrer qu'il contient M_1 et M_2. Faisons le pour M_1. La proposition 2.7 nous fournit une suite $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1^+, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_2^+$ de germes de cloisons de quartier parallèles et des appartements $A_1, \dots, A_n$ tels que A_i contienne $\mathfrak{F}_1^-$, $\mathfrak{F}_{i-1}$ et $\mathfrak{F}_i$. Pour tout appartement A' contenant $\mathfrak{F}_1^-$ et $\mathfrak{F}_i$, le mur engendré par $\mathfrak{F}_1^-$ ne dépend pas de l'appartement A' car il est dans l'enclos de $\mathfrak{F}_1^-$ et $\mathfrak{F}_i$; on le note $M(\mathfrak{F}_i)$. Grâce aux appartements A_i on a donc $M_1 = M(\mathfrak{F}_1^+ = \mathfrak{F}_0) = M(\mathfrak{F}_1) = \cdots = M(\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_2^+) \subset A$.

2) On peut supposer $\mathfrak{F}^\infty = \mathfrak{F}^{+\infty} \in \mathcal{I}^{+\infty}$. Notons $\mathfrak{F}^{-\infty}$ sa cloison opposée dans M^∞ et $\mathfrak{F}^-$ un germe de cloison de quartier de direction $\mathfrak{F}^{-\infty}$. Il existe un appartement A contenant $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}^-$. Le support M de $\mathfrak{F}$ dans A est un mur éventuellement fantôme ; c'est un vrai mur si $cl(\mathfrak{F}) = \overline{\mathfrak{F}}$. Il est clair dans A que $M^{+\infty} \ni \mathfrak{F}^{+\infty}$, $M^{-\infty} \ni \mathfrak{F}^{-\infty}$ et donc que le mur de $\mathcal{I}^\infty$ associé à M est bien M^∞. Soit M' un autre mur avec la même propriété. D'après la partie 1) M et M' sont parallèles dans un même appartement ; comme ils contiennent le même germe de cloison, ils sont égaux. □

4.9. L'arbre étendu associé à un mur à l'infini

1) Soit M^∞ un mur de $\mathcal{I}^\infty$, on note $\mathcal{I}(M^\infty)$ la réunion des appartements A de $\mathcal{I}$ contenant un mur M de direction M^∞ (qui sont appelés *appartements* de $\mathcal{I}(M^\infty)$). D'après la proposition précédente, $\mathcal{I}(M^\infty)$ est réunion disjointe des

murs (vrais ou fantômes) de direction M^∞. L'ensemble $\mathcal{I}^e(M^\infty)$ de ces murs est donc un quotient de $\mathcal{I}(M^\infty)$.

Choisissons une cloison $\mathfrak{F}^\infty \in M^\infty$ (*e.g.* positive) et notons $\mathfrak{F}^{-\infty}$ la cloison opposée dans M^∞ ; en fait M^∞ est déterminé par $\mathfrak{F}^\infty$ et $\mathfrak{F}^{-\infty}$. La seconde partie de la proposition précédente décrit une application bijective de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ sur $\mathcal{I}^e(M^\infty)$. Ainsi $\mathcal{I}(M^\infty)$ est un immeuble affine inessentiel dont le quotient essentiel $\mathcal{I}^e(M^\infty)$ est l'arbre $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$. Si $\mathfrak{R}$ est un germe de cheminée de direction $\mathfrak{F}^\infty$, on a vu que $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}^\infty}$ est une facette de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ (*cf.* 4.3) ; l'ensemble correspondant de $\mathcal{I}(M^\infty)$ est $\mathfrak{R}+M^\infty$ (*cf.* remarque 4.8). Quand $\mathcal{R}$ varie, ces ensembles $\mathfrak{R}+M^\infty$ décrivent donc les facettes de l'immeuble $\mathcal{I}(M^\infty)$.

2) On va mieux identifier les appartements de $\mathcal{I}^e(M^\infty)$. Il est d'abord clair que tout appartement de $\mathcal{I}(M^\infty)$ induit un appartement de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$, on a donc la propriété suivante (axiome (A5) de [25 ; appendix 3]) :

Propriété du Y: Si A_1, A_2 et A_3 sont trois appartements de $\mathcal{I}$ tels que chacune des intersections $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_3 \cap A_2$ soit un demi-appartement, alors $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ est non vide.

En effet, si les murs que sont les bords de deux de ces demi-appartements ne sont pas parallèles dans l'appartement A_i les contenant, la conclusion est évidente. Le cas parallèle découle de ce que $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est un arbre si $\mathfrak{F}$ est un germe de cloison de quartier dans un de ces murs.

3) Un appartement A contenant un germe de cloison de quartier $\mathfrak{F}$ de direction $\mathfrak{F}^\infty$ détermine deux germes de quartiers $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ dont $\mathfrak{F}^\infty$ est une cloison. L'appartement $A(\mathfrak{F}^\infty)$ de l'arbre $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ est entièrement déterminé par ses deux bouts $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$. Il y a donc (en général) beaucoup d'appartements A' de $\mathcal{I}$ déterminant le même appartement à l'infini $A'(\mathfrak{F}^\infty) = A(\mathfrak{F}^\infty)$. La proposition ci-dessous montre que parmi eux un et un seul est un appartement de $\mathcal{I}(M^\infty)$. On décrit ainsi la bijection entre les appartements de $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ et de $\mathcal{I}(M^\infty)$.

Proposition 4.10. *Dans les conditions précédentes, il existe un unique appartement A' contenant $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$, tel que le mur M de A' engendré par $\mathfrak{F}$ ait pour direction M^∞.*

Démonstration. Si A' est tel qu'indiqué, le mur M est l'unique mur (éventuellement fantôme) de 4.8.2. Il est clair que A' est réunion des enclos $cl(M \cup \mathfrak{Q}_1)$ et $cl(M \cup \mathfrak{Q}_2)$ donc unique.

D'après 4.8.2 il existe un appartement A tel que, dans A, le mur M engendré par $\mathfrak{F}$ ait pour direction M^∞. Soit $\mathfrak{F}^-$ le germe de cloison de quartier opposé à $\mathfrak{F}$ dans M. Soit A_i un appartement contenant $\mathfrak{F}^-$ et $\mathfrak{Q}_i$; le mur M_i de A_i engendré par $\mathfrak{F}^-$ a donc comme direction M^∞ (puisque $\mathfrak{F}^\infty \leq \mathfrak{Q}_i$). D'après l'unicité de 4.8.2 on a $M_i = M$. L'enveloppe convexe fermée de $\mathfrak{F}^-$ et $\mathfrak{Q}_i$ (*i.e.* l'enveloppe convexe fermée de M et $\mathfrak{Q}_i$) dans A_i est un demi-appartement D_i (éventuellement fantôme) de bord M. Dans A_1 considérons l'image $\mathfrak{Q}_3$ par la réflexion r_M de $-\mathfrak{Q}_1$. On a donc $\mathfrak{Q}_3 \subset D_1$ et $(\mathfrak{F}^-)^\infty \leq \mathfrak{Q}_3$. Soit A' un appartement contenant $\mathfrak{Q}_2$ et $\mathfrak{Q}_3$, on a $\mathfrak{F}^\infty, (\mathfrak{F}^-)^\infty \subset A'^\infty$, donc $M^\infty \subset A'^\infty$ et A' est réunion de murs de direction M^∞. Par unicité des murs de direction M^∞ contenant un germe de cloison (4.8.2) A' contient tout le demi-appartement de $D_1 \subset A_1$ engendré par $\mathfrak{F}^\infty$ et un quartier $\mathfrak{q}_3 \subset D_1$ de germe $\mathfrak{Q}_3$; en particulier $A' \supset \mathfrak{Q}_1$. Comme il contient aussi $\mathfrak{Q}_2$ il contient $\mathfrak{F}$ et donc (par unicité) M qui est de direction M^∞. □

Proposition 4.11. *Soient A_1 et A_2 deux appartements de $\mathcal{I}$ tels que $A_1 \cap A_2$ soit un demi-appartement D, alors il existe une rétraction ρ (de centre un germe de quartier) de $\mathcal{I}$ sur A_1 telle que $\rho(A_2) = D$.*

Remarque. À part la condition de diminution des distances (qui n'a un sens que pour les immeubles affines) ce résultat est l'axiome (A5) de [33].

Démonstration. Soient M le bord de D et $\mathfrak{F}$ un germe de cloison de quartier contenu dans le mur M. Tout se passe dans $\mathcal{I}(M^\infty)$ et donc principalement dans l'arbre $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$. Il suffit de choisir le germe de quartier $\mathfrak{Q}$ de $A_1 \setminus D$ dont une cloison est $\mathfrak{F}^\infty$ et de considérer la rétraction $\rho_{A_1,\mathfrak{Q}}$. □

4.12. Le problème de classification

Le théorème 2 de [33 ; p 166] dit qu'un immeuble affine $\mathcal{I}$ est déterminé à isomorphisme près par son immeuble sphérique à l'infini $\mathcal{I}^\infty$ (supposé épais) et les arbres $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty) \simeq \mathcal{I}(M^\infty)$ pour $\mathfrak{F}^\infty$ cloison de $\mathcal{I}^\infty$ contenue dans un mur M^∞. Si $\mathcal{I}^\infty$ est de Moufang, ces arbres déterminent une valuation de la donnée radicielle G associée à $\mathcal{I}^\infty$ [*l.c.* ; th 3 p 170] et cette valuation permet de reconstruire l'immeuble affine $\mathcal{I}$; on obtient ainsi la classification des immeubles affines irréductibles localement finis de dimension ≥ 3 [*l.c.* ; 14, 15]. On trouvera plus de détails dans [40].

On peut envisager une stratégie semblable pour classifier les masures affines. On a vu en 3.8.3 qu'à une masure affine épaisse 2−sphérique est souvent associée une donnée radicielle "jumelée" et que ces données radicielles sont classifiées dans de nombreux cas. Les résultats précédents sur les arbres $\mathcal{I}(\mathfrak{F}^\infty)$ ou $\mathcal{I}(M^\infty)$ doivent permettre de définir une valuation de la donnée radicielle. Malheureusement il n'y a pas encore de construction générale d'une masure affine associée à une donnée radicielle valuée (hors le cas du paragraphe 6 et ceux de [9] ou [30]). Ainsi ce processus de classification s'arrête là (pour l'instant en tout cas).

5. Propriétés à distance finie des masures

On considère une masure affine $\mathcal{I}$ que l'on supposera ordonnée à partir de 5.4.

Proposition 5.1. *Soient A un appartement de la masure $\mathcal{I}$, x_1 et x_2 deux points de A tels que $x_1 \leq_A x_2$. On considère des facettes locales de $\mathcal{I}$, F_1 et F_2 de sommets respectifs x_1 et x_2. Si F_1 est positive et F_2 négative, on suppose de plus $x_1 = x_2$ ou $x_2 - x_1 \in \mathcal{T}^\circ(A)$ (cône de Tits ouvert de A) i.e. $x_1 \overset{\circ}{\leq}_A x_2$. Alors il existe un appartement A' contenant F_1 et F_2.*

Démonstration. Quitte à échanger x_1, x_2 et changer les signes, on peut supposer vérifiée l'une des trois conditions suivantes : F_2 positive, $x_1 = x_2$ ou $x_2 - x_1 \in \mathcal{T}^\circ(A)$. Soit $\mathfrak{q}$ un quartier (négatif si $x_1 \neq x_2$) de sommet x_2 dans A tel que $x_1 \in \overline{\mathfrak{q}}$; alors, par convexité, il existe un appartement A_1 contenant $\mathfrak{q}$ et F_2 et cet appartement est isomorphe à A par un isomorphisme fixant $\mathfrak{q}$. Ainsi $x_1 \leq_{A_1} x_2$, et même $x_2 - x_1 \in \mathcal{T}^\circ(A_1)$, si c'est vrai dans A. On s'est donc ramené au cas où $F_2 \subset A$.

On voit facilement qu'il existe dans A_1 un quartier (positif si $x_1 \neq x_2$) $\mathfrak{q}_1$ de sommet x_1 tel que $F_2 \subset \overline{\mathfrak{q}_1}$. Par convexité il existe un appartement A' contenant F_1 et $\mathfrak{q}_1$, donc aussi F_2. $\square$

Proposition 5.2. *Sous les hypothèses de la proposition 5.1, supposons de plus $x_1 = x_2$ et les deux facettes locales F_1, F_2 de même signe. Alors deux appartements contenant F_1 et F_2 sont isomorphes par un isomorphisme fixant F_1 et F_2.*

N.B. Il résulte de la démonstration qui suit que, si deux appartements contiennent une même chambre locale C_0 en x, leur intersection est (localement) convexe par galeries : toute galerie tendue d'une chambre locale en x à une facette locale en x de cette intersection est entièrement contenue dans cette intersection. De plus tout isomorphisme fixant C_0 entre les deux appartements fixe toutes les chambres de ces galeries.

Démonstration.

On se ramène par le procédé habituel [6 ; IV 1] au cas où l'une des deux facettes (*e.g.* F_2) est une chambre. Soient A un appartement contenant F_1, F_2 et $\mathfrak{q}_2$ le quartier de sommet $x = x_1 = x_2$ dans A engendré par F_2. Si A' est un autre appartement contenant F_1 et F_2, on considère dans A' une galerie de chambres locales en x : $F_2 = C_0, C_1, \dots, C_n \supset F_1$ qui est minimale (de C_0 à F_1). En particulier le type de cette galerie donne un mot réduit de W^v, donc dans tout appartement A'' contenant $C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$, ces chambres locales sont toutes du même côté du mur (éventuellement fantôme) de A'' contenant la cloison $\overline{C_{k-1}} \cap \overline{C_k}$.

En utilisant 2.9.1 successivement pour les murs séparant C_{k-1} et C_k, on trouve un appartement A_2 de $\mathcal{I}$ contenant $\mathfrak{q}_2$, $C_0, C_1, \dots, C_n$ et donc F_1 ; de plus la galerie $C_0, C_1, \dots, C_n$ est minimale de F_2 à F_1 dans cet appartement A_2. D'après (MA4) $A \supset cl_{A_2}(F_1, \mathfrak{Q}_2) = cl_{A_2}(F_1, \mathfrak{q}_2) \supset cl_{A_2}(F_1, C_0) \supset \overline{C_0} \cup \overline{C_1} \cup \dots \cup \overline{C_n}$ et il existe un isomorphisme $\varphi : A_2 \to A$ fixant cet enclos. D'après (MA2) appliqué à $C_0 = F_2$, il existe un isomorphisme $\psi : A' \to A_2$ qui fixe C_0. Mais les chambres locales $C_0, C_1, \dots, C_n$ sont dans A' et A_2, donc, par récurrence, ψ fixe chaque C_j. Finalement l'isomorphisme $\varphi \circ \psi$ fixe F_1 et F_2, c'est l'isomorphisme cherché. $\square$

5.3. Immeubles résiduels Soit x un point de la masure $\mathcal{I}$.

1) On note $\mathcal{I}_x^+$ (resp. $\mathcal{I}_x^-$) l'ensemble des germes de segments positifs (resp. négatifs) $[x, y)$ de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_x^+ \cup \mathcal{I}_x^-$. Si A est un appartement de $\mathcal{I}$ contenant x, on note A_x^+ (resp. A_x^-) l'ensemble de ces germes de segments positifs (resp. négatifs) contenus dans A et $A_x = A_x^+ \cup A_x^-$. Dans le cas fini $A_x = A_x^+ = A_x^-$

(resp. $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_x^+ = \mathcal{I}_x^-$) est la “sphère unité tangente” en x à A (resp. $\mathcal{I}$). Si F est une facette ou une facette locale de $\mathcal{I}$ positive (resp. négative) contenant x dans son adhérence, on note F_x l'ensemble des germes de segments positifs (resp. négatifs) $[x, y)$ pour $]x, y) \subset F$.

2) Soient $\varepsilon = \pm$ et A un appartement contenant x. Le choix de x comme origine identifie A à $V(A)$. Alors A_x^ε est identifié à l'ensemble $V(A)^{s\varepsilon}$ des demi-droites d'origine 0 de $\varepsilon\mathcal{T}(A) \subset V(A)$; il hérite des deux structures de complexes de Coxeter que l'on va définir sur $\varepsilon\mathcal{T}(A)$:

- La structure non restreinte est celle décrite en 1.3 (pour V), son groupe de Weyl est $W^v(A) \simeq W^v$. Les facettes correspondantes dans A_x^ε sont les F_x^ℓ où F^ℓ est une facette-locale en x de signe ε contenue dans A. Les murs correspondants sont éventuellement fantômes.

- La structure restreinte a pour groupe de Weyl le sous-groupe $W^v(A)_x$ de $W^v(A)$ engendré par les réflexions vectorielles par rapport aux directions des (vrais) murs de A contenant x. Ce groupe est un groupe de Coxeter pour un ensemble de générateurs éventuellement infini [10] ; des résultats complémentaires sont prouvés dans [35] ainsi que dans [3 ; 5.1] ou [19 ; 5.7] (où la restriction à un contexte légèrement différent peut être levée); la meilleure référence ici semble être [14]. Il résulte de ces raisonnements que A_x^ε est muni d'une structure de complexe de Coxeter dont les murs sont les (vrais) murs de A contenant x et dont les facettes sont les F_x où F est une facette de A de signe ε dont l'adhérence contient x. Ce complexe de Coxeter peut cependant être tronqué, car l'ensemble des facettes F_x dans l'adhérence d'une chambre C_x peut ne pas être en bijection (décroissante) avec l'ensemble des parties de l'ensemble des cloisons de C_x. Par contre le groupe $W^v(A)_x$ (agissant sur A en fixant x) est bien simplement transitif sur les chambres C_x de même signe et engendré par l'ensemble $S(C_x^0)$ (éventuellement infini) des réflexions par rapport aux murs de l'une de ces chambres C_x^0, voir [35 ; prop.3]. L'axiome (MA2) et cette simple transitivité montrent que le système de Coxeter $(W^v(A)_x, S(C_x^0))$ ne dépend pas, à isomorphisme unique près, des choix de A et C_x^0, on le note (W_x^v, S_x) ; bien sûr W_x^v est un sous-groupe de W^v.

3) On munit les appartements A_x^ε de $\mathcal{I}_x^\varepsilon$ de l'une des deux structures de complexe de Coxeter décrites ci-dessus. Alors les propositions 5.1 et 5.2 montrent

que $\mathcal{I}_x^\varepsilon$ avec ses appartements est un immeuble au sens classique, *cf. e.g.* [6 ; IV 1].

On note $Ch_r(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}_x^\varepsilon$ pour la structure restreinte. Il est muni d'une W_x^v-distance d_ε^r (vérifiant les axiomes de [37 ; 2.1] ou [24 ; 2.3.1] puisqu'elle traduit la structure d'immeuble) : on choisit un appartement A_0 contenant x et une chambre positive C^0 de A_0 contenant x dans son adhérence. Si $C_x, C'_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$, on choisit un appartement A contenant les chambres correspondantes C, C' et on identifie A à $V(A)$ par le choix de x pour origine. D'après (MA2) il existe un isomorphisme φ de (A_0, x) sur (A, x). Alors, si $\varphi^{-1}(C) = \varepsilon w C^0$ et $\varphi^{-1}(C') = \varepsilon w' C^0$ pour $w, w' \in W^v(A_0)_x \simeq W_x^v$, on définit $d_\varepsilon^r(C_x, C'_x) = w^{-1}w'$; ceci ne dépend pas des choix effectués.

On note $Ch_{nr}(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}_x^\varepsilon$ pour la structure non restreinte. Il est muni d'une W^v-distance d_ε^{nr}, définie de manière analogue à la précédente et qui traduit la structure non restreinte d'immeuble sur $\mathcal{I}_x^\varepsilon$, *cf.* [13 ; sect. 4.5].

On suppose dans le reste de ce § 5 la masure $\mathcal{I}$ **ordonnée**.

Proposition 5.4. *Dans la masure ordonnée $\mathcal{I}$, on considère deux appartements A_1, A_2 et deux points distincts x, y de $A_1 \cap A_2$ vérifiant $x \leq_{A_1} y$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq}_{A_1} y$). Alors $x \leq_{A_2} y$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq}_{A_2} y$) et il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 qui fixe $cl_{A_1}([x, y])$.*

Conséquences.

1) On peut donc définir des relations $\leq$ et $\overset{\circ}{\leq}$ dans la masure ordonnée $\mathcal{I}$:

Pour tous $x, y \in \mathcal{I}$, on dit que $x \leq y$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq} y$) si et seulement si il existe un appartement A de $\mathcal{I}$ contenant x, y tel que $x \leq_A y$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq}_A y$) (ceci ne dépend pas du choix de A).

On va voir en 5.9 que $\leq$ ou $\overset{\circ}{\leq}$ est un préordre. Bien sûr $x \overset{\circ}{\leq} y \Rightarrow x \leq y$.

2) Pour $x \leq y$ dans $\mathcal{I}$, le segment $[x, y]$ et même son enclos est indépendant de l'appartement choisi contenant x et y. On peut en particulier parler de *convexité préordonnée* dans $\mathcal{I}$.

Démonstration.

1) D'après l'axiome (MAO), on a $[x,y)_{A_1} = [x,y)_{A_2} \subset A_1 \cap A_2$; l'axiome (MA2) dit donc qu'il existe un isomorphisme φ de A_1 sur A_2 qui fixe $[x,y)$. Ainsi, dans A_2, $[x,y)$ est un germe de segment positif (resp. et générique) et donc $x \leq_{A_2} y$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq}_{A_2} y$).

2) Notons Δ_1 (resp. Δ_2) la demi-droite de A_1 (resp. A_2) d'origine x (resp. y) et contenant y (resp. x). Ces deux demi-droites sont préordonnées et ont en commun le segment $[x,y]$. On va prouver l'existence d'un appartement les contenant toutes les deux et dans lequel leur réunion Δ est une droite.

Soit $\mathfrak{Q}_2$ un germe de quartier de A_2 contenant la direction de Δ_2 dans son adhérence. D'après (MA3) et par compacité de $\Delta_1 \cup \{\infty\}$ (*cf.* la preuve de 2.7) il existe des points distincts $y_1 = x, y_2 = y, y_3, \ldots, y_n$ dans cet ordre sur Δ_1 et des appartements $A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ contenant tous $\mathfrak{Q}_2$ et respectivement $[y_1, y_2], [y_2, y_3], \ldots, [y_{n-1}, y_n]$, $[y_n, \infty] = \Delta_1 \setminus [x, y_n[$. L'appartement A_2 contient Δ_2. L'appartement A_3 contient y_2 et $\mathfrak{Q}_2$ et donc aussi Δ_2 (par convexité, *cf.* (MA4)). Mais $y = y_2 \in [x, y_3]_{A_1}$ et $x \leq_{A_1} y_3$; d'après (MAO), $[x, y_3]_{A_1} = [x, y_3]_{A_3}$ et $y_2 \in [x, y_3]$. Ainsi $\Delta_3 = \Delta_2 \cup [y_2, y_3]$ est une demi-droite de A_3 d'origine y_3 dans l'enveloppe convexe de $\mathfrak{Q}_2$ et y_3. On est dans la situation du départ avec A_2 devenu inutile. On a donc montré, par récurrence sur n, que A_{n+1} contient $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ et que Δ est une droite de A_{n+1}.

3) Un meilleur choix de l'appartement:

Soit C_1^v une chambre vectorielle de A_1 et F_1^v la facette vectorielle engendrée par la direction de Δ_1. On considère dans A_1 la cheminée pleine $\mathfrak{r}_1 = cl(germ_y(y + C_1^v) + F_1^v)$ et son germe $\mathfrak{R}_1$. Il est clair que $cl(x, \mathfrak{R}_1) \supset \mathfrak{r}_1 \supset \Delta_1$. Dans 2) ci-dessus on peut supposer que $A' = A_{n+1}$ contient $\mathfrak{Q}_2$ et $\mathfrak{R}_1$; on a vu qu'il contient Δ_1 et Δ_2 en particulier x et y. Ainsi A' contient le quartier $\mathfrak{q}_2$ de A_2 de sommet y et direction $\mathfrak{Q}_2$ ainsi que la cheminée pleine $\mathfrak{r}_1$. D'après l'axiome (MA4) on a un isomorphisme φ de A_1 sur A' fixant $cl(x, \mathfrak{R}_1) \supset cl([x,y])$ et un isomorphisme ψ de A' sur A_2 fixant $cl(\mathfrak{q}_2) \supset ([x,y])$. Ainsi $\psi \circ \varphi$ est l'isomorphisme cherché. $\square$

Proposition 5.5. *Soient A un appartement de la masure ordonnée $\mathcal{I}$, x_1 et x_2 deux points de A tels que $x_1 \leq_A x_2$. On considère des facettes locales de $\mathcal{I}$, F_1 et F_2 de sommets respectifs x_1 et x_2. On suppose $x_2 - x_1 \in \mathcal{T}^\circ(A)$ ou F_2 positive et F_1 négative. Alors, si des appartements A' et A'' contiennent F_1 et F_2, ils* *contiennent leur enveloppe convexe et il existe un isomorphisme de A' sur A'' qui fixe cette enveloppe convexe.*

Remarque. On a montré l'existence d'appartements A' et A'' comme dans l'énoncé en 5.1 (sous une hypothèse moins restrictive). Avec l'hypothèse ci-dessus, si Ω_2 (resp. Ω_1) est un élément assez petit du filtre F_2 (resp. F_1) contenu dans A', alors pour tous $y_2 \in \Omega_2$ et $y_1 \in \Omega_1$ on a $y_1 \leq y_2$.

Démonstration. On suppose Ω_2 et Ω_1 comme ci-dessus, convexes et contenus dans A' et A''. D'après 5.4 $A' \cap A''$ contient $[y_1, y_2]_{A'} = [y_1, y_2]_{A''}$ pour tous $y_2 \in \Omega_2$ et $y_1 \in \Omega_1$. Ainsi $A' \cap A''$ contient l'enveloppe convexe de $\Omega_2 \cup \Omega_1$ et donc de $F_2 \cup F_1$. Pour construire l'isomorphisme de A' sur A'' on se ramène (par le procédé habituel [6 ; IV 1]) au cas où l'une des facettes locales (*e.g.* F_1) est une chambre.

Soient $y_1 \in \Omega_1$ tel que $F_1 \subset cl([x_1, y_1))$ et z_1 le milieu de $[x_1, y_1]$. Alors z_1 est dans un ouvert de A' ou A'' contenu dans $cl([x_1, y_1]) \cap \Omega_1$. D'après 5.4 il existe un isomorphisme φ de A' sur A'' qui fixe $cl([x_1, y_1])$. Soit $z_2 \in \Omega_2$, alors $[z_1, z_2] \subset A' \cap A''$ rencontre $cl([x_1, y_1])$ selon un voisinage ouvert de z_1 dans $[z_1, z_2]$. Donc φ est une bijection affine de $[z_1, z_2]$ sur son image dans A'' qui est l'identité sur un voisinage de z_1. Or 5.4 appliqué à $[z_1, z_2]$ dit que l'identité de $[z_1, z_2]$ est une bijection affine (pour les structures affines héritées respectivement de A' et A''), donc φ coïncide avec cette bijection affine ; en particulier $\varphi(z_2) = z_2$. Ainsi φ fixe Ω_2 et $cl([x_1, y_1])$, donc Ω_1 (quitte à le remplacer par un élément plus petit de F_1). Pour $t_1 \in \Omega_1$, $t_2 \in \Omega_2$ le même raisonnement que ci-dessus montre que φ fixe $[t_1, t_2]$. Mais l'enveloppe convexe de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ est la réunion de ces segments, d'où la proposition. □

5.6. Jumelage des immeubles résiduels

Pour un point x de la masure ordonnée $\mathcal{I}$, on a défini (en 5.3) deux ensembles $\mathcal{I}_x^+$, $\mathcal{I}_x^-$ et deux structures d'immeubles sur chacun d'eux, la non restreinte de groupe de Weyl W^v et la restreinte de groupe de Weyl W_x^v. Pour chacune de ces structures on peut définir un jumelage de $\mathcal{I}_x^+$ et $\mathcal{I}_x^-$. Le cas non restreint étant traité en détail dans [13], on se concentre ici sur le cas restreint.

On définit ci-dessous une application *codistance*:

$$d_*^r \ : \ Ch_r(\mathcal{I}_x^+) \times Ch_r(\mathcal{I}_x^-) \cup Ch_r(\mathcal{I}_x^-) \times Ch_r(\mathcal{I}_x^+) \to W_x^v$$

On choisit un appartement A_0 contenant x et une chambre positive C^0 de A_0 contenant x dans son adhérence. Si $\varepsilon = \pm$, $C_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$ et $C'_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^{-\varepsilon})$, on choisit un appartement A contenant les chambres correspondantes C, C' et on identifie A_0 à $V(A_0)$ par le choix de x comme origine. D'après (MA2) il existe un isomorphisme φ de (A_0, x) sur (A, x). Alors, si $\varphi^{-1}(C) = \varepsilon w C^0$ et $\varphi^{-1}(C') = -\varepsilon w' C^0$ pour $w, w' \in W^v(A_0)_x \simeq W_x^v$, on définit $d_*^r(C_x, C'_x) = d_{-\varepsilon}^r(-C_x, C'_x) = d_\varepsilon^r(C_x, -C'_x) = w^{-1}w'$; ceci ne dépend pas des choix effectués d'après 5.5.

Proposition. *d_*^r est un jumelage des immeubles $\mathcal{I}_x^+$ et $\mathcal{I}_x^-$ munis de leurs structures restreintes.*

Remarque. On a de même un jumelage d_*^{nr} (codistance à valeurs dans W^v) de ces immeubles munis de leurs structures non restreintes.

Démonstration.

Il faut vérifier les axiomes de [37 ; 2.2], voir aussi [24 ; 2.5.1].

On a $d_*^r(C'_x, C_x) = w'^{-1}w = d_*^r(C_x, C'_x)^{-1}$, d'où (Tw1). Soient maintenant $C_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$ et $C'_x, C''_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^{-\varepsilon})$ des chambres telles que $d_*^r(C_x, C'_x) = w \in W_x^v$ et $d_{-\varepsilon}^r(C'_x, C''_x) = s \in S_x$, avec $\ell(ws) = \ell(w) - 1$ (longueurs calculées dans le système de Coxeter (W_x^v, S_x)). Soit A un appartement contenant C et C' (et donc x) ; on choisit de réaliser (W_x^v, S_x) dans A par le choix de εC comme chambre fondamentale. Comme $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, le (vrai) mur M engendré par la cloison de $-\varepsilon C'$ de type $\{s\}$ sépare $-\varepsilon C'$ de εC ; ainsi C et C' sont du même côté de M. D'après 2.9.1 il existe un appartement A' contenant C, C' et C''. Dans cet appartement $C' = w.(-C)$ et $C'' = (wsw^{-1}).C'$ donc $C'' = ws.(-C)$ et $d_*^r(C_x, C''_x) = ws$, c'est l'axiome (Tw2).

Pour vérifier le troisième axiome (Tw3), soient $C_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^\varepsilon)$, $C'_x \in Ch_r(\mathcal{I}_x^{-\varepsilon})$, $w = d_*^r(C_x, C'_x) \in W_x^v$ et $s \in S_x$. Dans un appartement A contenant C et C', considérons la chambre $C'' \neq C'$ adjacente à C' le long de la cloison de type $\{s\}$. On a bien $d_{-\varepsilon}^r(C'_x, C''_x) = s$ et $d_*^r(C_x, C''_x) = ws$ comme demandé. $\square$

Proposition 5.7. *Soient C^-, C deux chambres négatives d'un immeuble jumelé (de groupe de Weyl W) et C^+ une chambre positive opposée à C^-. On considère un appartement jumelé $A = A^- \cup A^+$ contenant C et la rétraction $\rho = \rho_{A,C}$ de l'immeuble sur A de centre C. On note w^- et w^+ les éléments de $W = W(A)$ tels que $\rho(C^-) = w^-C$ et $\rho(C^+) = -w^+C$ (la chambre de A^+ opposée à $w^+C \in A^-$). Alors $w^+ \leq w^-$ pour l'ordre de Bruhat-Chevalley sur $W(A)$ correspondant au* *choix du système de générateurs formé des réflexions par rapport aux murs de C (ou $-C$).*

Démonstration. On a $w^+ = d_*(C, C^+)$ et $w^- = d_-(C, C^-)$. La relation $d_*(C, C^+) \leq d_-(C, C^-)$ ou plutôt $d_*(C^+, C) \leq d_-(C^-, C)$ est exactement ce qu'obtient Peter Abramenko au cours de la démonstration de $\ell(d_*(C^+, C)) \leq \ell(d_-(C^-, C))$ dans sa Remark 3 page 24 de [1] ; voir aussi [2 ; 5.143]. $\square$

Corollaire 5.8. *Soient $\mathfrak{Q} = germ_\infty(x_0 - C^v)$ un germe de quartier négatif dans un appartement A de la masure ordonnée $\mathcal{I}$, $\rho = \rho_{A,\mathfrak{Q}}$ la rétraction sur A de centre $\mathfrak{Q}$ (cf. 2.6) et $x \leq y$ deux points de $\mathcal{I}$. Alors l'image $\rho([x, y])$ du segment $[x, y]$ dans A est une ligne brisée qui est "pliée positivement", c'est à dire :*

pour tout $z_1 = \rho(z) \in \rho(]x, y[)$, on note $\pi_+ = \rho([z, y))$ (resp. $\pi_- = \rho([z, x))$) et w_+ (resp. w_-) l'élément minimal de W^v tel que $\pi_+ \subset w_+(z_1 + \overline{C^v})$ (resp. $\pi_- \subset w_-(z_1 - \overline{C^v})$), on a alors $w_+ \leq w_-$ pour l'ordre de Bruhat-Chevalley.

Remarques. 1) L'ordre de Bruhat-Chevalley choisi sur $W^v = W^v(A)$ correspond au choix du système de générateurs formé des réflexions par rapport aux murs de la chambre vectorielle C^v de A.

2) La relation $\leq$ et le segment $[x, y]$ sont bien définis dans $\mathcal{I}$ (5.4). On a démontré en 2.8 que $\rho([x, y])$ est une ligne brisée "croissante", en particulier π_+ (resp. π_-) est un germe de segment positif (resp. négatif) en z_1.

Démonstration. D'après (MA2) on peut supposer que A contient $\mathfrak{Q}$ et $[z, x)$, donc $z = z_1$ et $\pi_- = [z, x)$. Considérons la chambre-locale (en z) $C = germ_z(z - C^v)$. Par définition de w_- on a $\pi_- \subset \overline{C^-} = w_-\overline{C}$. Dans un appartement contenant C^- et $[z, y)$ (5.1), on note C^+ la chambre-locale en z opposée à C^- et $w'_+ = d^{nr}_{*z}(C, C^+)$. Il est clair que $\pi_+ \subset \rho(\overline{C^+}) = w'_+.germ_z(z + \overline{C^v}) \subset w'_+.(z + \overline{C^v})$, donc $w_+ \leq w'_+$ [15 ; 5.12 p. 123]. Il est clair que ρ induit dans l'immeuble jumelé $\mathcal{I}_z$ (avec sa structure non restreinte) la rétraction de centre C_z. De plus C_z^+ et C_z^- sont opposées et se rétractent respectivement sur $-w'_+C_z$ et w_-C_z. Enfin les choix de systèmes de générateurs de $W^v = w^v(A)$ effectués en 5.7 et 5.8 sont les mêmes. D'après 5.7 on a $w'_+ \leq w_-$, donc $w_+ \leq w_-$. $\square$

Théorème 5.9. *Dans la masure ordonnée $\mathcal{I}$ la relation $\leq$ ou $\overset{\circ}{\leq}$ (définie en 5.4.1) est un préordre. Plus précisément si trois points x, y et z dans $\mathcal{I}$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ et en particulier les points x, z sont dans un même appartement ; de même pour $\overset{\circ}{\leq}$.*

Remarque. D'après 1.5.4 la relation $\overset{\circ}{\leq}$ (resp. $\leq$) est une relation d'ordre en dehors du cas fini où elle est triviale (resp. si W^v est essentiel sans facteur fini ni affine). On a $x \leq y$, $y \overset{\circ}{\leq} z$, $y \neq z$ (ou $x \overset{\circ}{\leq} y$, $y \leq z$, $x \neq y$) $\Rightarrow x \overset{\circ}{\leq} z$.

Démonstration. On suppose $x \neq y$ et $y \neq z$. Dans le cas semi-discret, il suffit de traduire mot à mot la démonstration du Theorem 6.9 de [13] en rajoutant au dictionnaire les traductions suivantes : [*l.c.* ; sect. 4.3.4 ou lemma 6.11]$\mapsto$ 5.1 et 5.5, [*l.c.* ; sect. 4.4] $\mapsto$ 2.7.1 et [*l.c.* ; prop. 6.1]$\mapsto$ 5.8. Pour le cas général il faut réorganiser les ingrédients de cette démonstration :

1) Pour $z' \in [y, z[$ tel que $x \leq z'$, on choisit un appartement A contenant $[z', x)$ et $[z', z)$ (5.1) ; cet appartement a un système de racines réelles associé $\Phi(A)$ et on définit l'ensemble fini $\Phi(z')$ des racines $\alpha \in \Phi(A)$ telles que $\alpha(z') > \alpha(x_1)$ et $\alpha(z') > \alpha(z_1)$ pour certains $x_1 \in [x, z'] \cap A$ et $z_1 \in [z, z'] \cap A$. Comme $[z', x)$ et $[z', z)$ sont préordonnés, 5.5 montre que $\Phi(z')$ dépend, à isomorphisme près, seulement de $[z', x)$ et $[z', z)$ mais pas de A.

On raisonne par récurrence sur $|\Phi(y)|$; s'il vaut -1 le théorème est démontré.

2) D'après 5.1, il existe un appartement A_1 contenant x et $[y, z)$. On choisit une chambre vectorielle C^v dans A_1 telle que son système de racines positives associé $\Phi^+(C^v)$ contienne les racines $\alpha \in \Phi(A_1)$ telles que $\alpha(y) > \alpha(x)$ ou $\alpha(y) = \alpha(x)$ et $\alpha(z_1) > \alpha(y)$ (pour un $z_1 \in [y, z] \cap A_1$) ; en particulier $[x, y] \subset (y - \overline{C^v}) \cap (x + \overline{C^v})$ et $[y, z) \subset x + \overline{C^v}$. Maintenant si $\alpha \in \Phi^+(C^v)$ est tel que $\alpha(z_1) < \alpha(y)$ (pour un $z_1 \in [y, z] \cap A_1$) alors $\alpha(y) > \alpha(x)$; donc $\Phi(y)$ (calculé dans A_1) est l'ensemble des racines $\alpha \in \Phi^+(C^v)$ telles que $\alpha(z_1) < \alpha(y)$ (pour un $z_1 \in [y, z] \cap A_1$).

Soient $\mathfrak{Q}$ le germe de quartier associé à $-C^v$ dans A_1 et ρ la rétraction de centre $\mathfrak{Q}$ sur A_1.

3) On note $\Sigma_1 = [y, Z]$ le segment de A_1 d'origine y, contenant $[y, z)$ et affinement isomorphe à $[y, z]$. On note Z_1 le point le plus éloigné de y dans $\Sigma_1 \cap (x + \overline{C^v})$, donc $\forall Z_2 \in [y, Z_1]$, $x \in Z_2 - \overline{C^v}$. On note enfin $z_1 \in]y, z]$ le point correspondant à Z_1 par l'isomorphisme affine de $[y, Z]$ sur $[y, z]$.

Comme en 2.7.1 on obtient une suite $y_0 = y, y_1, \ldots, y_n = z_1 \in [y, z_1]$ et des appartements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que A_i contienne $\mathfrak{Q}$ et $[y_{i-1}, y_i]$. En particulier $x \in y_1 - \overline{C^v}$ et $x \leq y_1$ (resp. $x \overset{\circ}{\leq} y_1$) : le théorème est démontré si $y_1 = z$. Si $y_1 \neq z$ on raisonne par récurrence sur n. On considère l'appartement A_2 ci-dessus si $n \geq 2$ et un appartement A_2 contenant $[y_1, z)$ et $y_1 - \overline{C^v}$ (donc aussi x et $\mathfrak{Q}$) si $n = 1$ *i.e.* $y_1 = z_1 \neq z$. On va maintenant comparer $\Phi(y)$ et $\Phi(y_1)$.

4) La rétraction ρ envoie isomorphiquement A_2 sur A_1. Ceci permet d'identifier $\Phi(y_1)$ avec l'ensemble $\Phi'(y_1)$ des racines $\alpha \in \Phi(A_1)$ telles que $\alpha(y_1) > \alpha(x)$ (donc $\alpha \in \Phi^+(C^v)$) et $\alpha(y_1) > \alpha(\rho z_2)$ (pour un $z_2 \in [y_1, z] \cap A_2$). On a $\rho([y_1, z)) = y_1 + [0, 1)w^+\lambda$, $[y, y_1) = y + [0, 1)w^-\lambda$ pour un certain $\lambda \in \overline{C^v}$ et certains $w^+, w^- \in W^v$, avec $w^+ \leq w^-$ d'après 5.8. En particulier, pour $\alpha \in \Phi^+(C^v)$, $\alpha(y_1) > \alpha(\rho z_2)$ signifie $\alpha(w^+\lambda) < 0$, donc $\Phi'(y_1) \subset \{\alpha \in \Phi^+(C^v) \mid \alpha(w^+\lambda) < 0\}$ et (comme w^+ est choisi minimal) cet ensemble a pour cardinal $\ell(w^+)$. Mais nous avons vu en 2) que $\Phi(y) = \{\alpha \in \Phi^+(C^v) \mid \alpha(w^-\lambda) < 0\}$. Donc, comme $w^+ \leq w^-$, $|\Phi'(y_1)| \leq \ell(w^+) \leq \ell(w^-) \leq |\Phi(y)|$.

Si $|\Phi'(y_1)| < |\Phi(y)|$ le théorème est démontré par récurrence. Sinon les 4 nombres ci-dessus sont égaux ; en particulier, comme $w^+ \leq w^-$, on a $w^+ = w^-$ et $\Phi'(y_1) = \Phi(y)$.

5) Si $y_1 = z_1 \neq z$, alors, par définition, il existe $\alpha \in \Phi^+(C^v)$ tel que $\alpha(Z) < \alpha(y_1) = \alpha(x)$, donc $\alpha(Z) < \alpha(y)$. Ainsi $\alpha \in \Phi(y)$ et $\alpha \notin \Phi'(y_1)$; c'est absurde.

Donc maintenant $y_1 \neq z_1$. Comme $w^+ = w^-$, y et $\rho([y_1, z))$ sont alignés dans A_1. L'isomorphisme ρ de A_2 sur A_1 identifie la chambre vectorielle C^v de A_1 définie en 2) à celle que l'on peut définir de la même manière dans A_2 avec y_1 (en effet, comme $y_1 \neq z_1$, $\alpha(y) > \alpha(x) \Rightarrow \alpha(y_1) > \alpha(x)$).

Si on définit $\Sigma'_1 = [y_1, Z']$, $Z'_1 \in \Sigma'_1$ et $z'_1 \in [y_1, z]$ comme en 3) avec (A_2, y_1, C^v) à la place de (A_1, y, C^v), l'isomorphisme ρ de A_2 sur A_1 envoie Σ'_1 sur $[y_1, Z]$ et Z'_1 sur Z_1 ; donc $z'_1 = z_1$. Le raisonnement de l'étape 3) (pour y_1 et A_2) fournit alors les mêmes points $y_1, \ldots, y_n = z_1 \in [y_1, z_1]$. On est donc passé de n à $n-1$ et le théorème est prouvé par récurrence. $\square$

Remarque 5.10.

Ce théorème est le meilleur résultat de cet article pour caractériser des paires de points de la masure ordonnée $\mathcal{I}$ qui sont situés dans un même appartement.

Dans le cas fini, on a $x \leq y$ (et même $x \overset{\circ}{\leq} y$) pour tous x, y dans un même appartement A. Pour tous $x, y \in \mathcal{I}$ il existe un point z et deux appartements A_1, A_2 tels que $x, z \in A_1$ et $y, z \in A_2$; on a donc $x \leq z \leq y$ et x, y sont dans un même appartement d'après 5.9. D'après 5.1 et 5.5 deux facettes de $\mathcal{I}$

sont donc toujours contenues dans un même appartement A, qui est unique à un isomorphisme fixant les deux facettes près. Ainsi 5.9 peut être vu comme une généralisation de [7 ; 7.3.4 et 7.3.6].

Si le groupe de Weyl W^v de la masure ordonnée $\mathcal{I}$ est affine, il existe une forme linéaire δ sur V (la "plus petite racine imaginaire positive") qui est combinaison linéaire à coefficients positifs des α_i, invariante par W^v et telle que $\mathcal{T}^\circ = \{v \in V \mid \delta(v) > 0\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\circ \cup V_0$. Chaque appartement A est muni d'une forme linéaire δ_A telle que $x \leq_A y \Leftrightarrow \delta_A(y-x) > 0$ ou $x - y \in V_0$; de plus $\delta_A(y-x)$ est indépendant du choix de l'appartement A contenant x et y. Choisissons un germe de quartier positif $\mathfrak{Q}$, on peut donc définir $\delta_{\mathfrak{Q}}(y-x)$ pour tous x, y dans $\mathcal{I}$ par $\delta_{\mathfrak{Q}}(y-x) = \delta_A(\rho y - \rho x)$ pour tout appartement A contenant $\mathfrak{Q}$ et pour $\rho = \rho_{A,\mathfrak{Q}}$. D'après 2.7.1 on a $\delta_{\mathfrak{Q}}(y-x) = \delta_A(y-x)$ dès que $x, y \in A$ et $\delta_A(y-x) \neq 0$. Donc $y \geq x$ et $y \neq x \Rightarrow \delta_{\mathfrak{Q}}(y-x) > 0$.

Howard Garland [11] considère la situation d'un groupe de lacets sur un corps discrètement valué K (on supposera ici que son corps résiduel contient $\mathbb{C}$). Plus précisément, pour un groupe semi-simple simplement lacé G, il étudie un sous-groupe $\widehat{G}_b$ de $G(K(\!(t)\!))$ qui est contenu dans le groupe engendré par $U_{\mathfrak{Q}}^{max+}$ et $U_{\mathfrak{Q}}^-$ (notations de [13 ; sect. 3.2 et 3.3] en considérant le groupe de Kac-Moody $G_1 = G(K[t,t^{-1}]) \rtimes K^*$). Il semble que $\widehat{G}_b$ n'agisse que sur un espace $\mathcal{I}'$ plus gros que la masure $\mathcal{I}$ construite dans *l.c.* pour G_1, mais il fixe $\mathfrak{Q}$. Dans $\mathcal{I}'$ la décomposition de Cartan tordue que Garland prouve semble montrer que, si $x, y \in \mathcal{I}'$ et $\delta_{\mathfrak{Q}}(y-x) > 0$, il existe un appartement contenant x, y et $\mathfrak{Q}$. On peut donc se demander si la réciproque de la dernière phrase de l'alinéa précédent est vraie dans toute masure ordonnée de groupe de Weyl W^v affine. Un tel résultat préciserait beaucoup le théorème 5.9 : presque toutes les paires de points seraient contenues dans un même appartement.

6. Masures associées à certains groupes de Kac-Moody

Dans ce dernier paragraphe on se propose de montrer que les masures (hovels) construites dans [13] (ou en tout cas la plupart d'entre elles) forment des masures affines, ordonnées, épaisses et semi-discrètes au sens adopté ici. On ne rappellera pas toutes les définitions introduites dans *loc. cit.*

6.1. La situation

On considère donc un groupe de Kac-Moody G défini sur un corps K muni d'une valuation discrète ω pour laquelle le corps résiduel κ contient $\mathbb{C}$.

On suppose que G vérifie les hypothèses techniques de *loc. cit.* ; en particulier il est déployé et symétrisable. On suppose de plus qu'il vérifie l'hypothèse (SC) de [*l.c.* ; sect. 2.1.5]: (SC) $Q^\vee = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ est sans cotorsion dans Y.

En fait, d'après le raisonnement de *loc. cit.* , on doit pouvoir toujours se ramener à ce cas sans beaucoup changer l'espace $\mathcal{I}$.

On a construit dans *loc. cit.* un ensemble $\mathcal{I}$, muni d'un recouvrement par un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles appelés appartements. Tous ces appartements sont permutés par $G(K)$ et donc isomorphes à un appartement fondamental $A_f = \mathbb{A}$. Le stabilisateur de A_f est un groupe $N(K)$ (normalisateur du tore fondamental T_f de groupe de caractères (resp. cocaractères) X (resp. Y)) qui agit sur $\mathbb{A}$ par un groupe W_Y.

L'espace $\mathbb{A}$ est un appartement semi-discret au sens de 1.4 ci-dessus. On le considère comme modérément imaginaire, car muni des murs décrits en 1.2.1 et 1.4.d. Le groupe W_Y est un groupe de transformations affines stabilisant l'ensemble des murs réels ou imaginaires et contenant le groupe de Weyl affine W (engendré par les réflexions par rapport aux murs réels). En particulier W_Y normalise W. Ainsi tout appartement de $\mathcal{A}$ est muni d'une structure d'appartement de type $\mathbb{A}$ et l'axiome (MA1) est vérifié.

6.2. Le sous-groupe $G(K)_1$

Le groupe $Y_1 = Y/Q^\vee$ est abélien libre. C'est le groupe des cocaractères d'un tore T_1 (de groupe de caractères $X_1 = \{\chi \in X \mid \chi(Q^\vee) = 0\}$) et l'homomorphisme naturel δ de T_f sur T_1 se prolonge en un homomorphisme δ de G sur T_1 trivial sur tous les sous-groupes radiciels : il suffit, pour tout corps K' contenant K, de considérer la présentation de $G(K')$ donnée par J. Tits, *cf.* [24 ; 8.3.3 et 8.4.2].

Si $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de (K,ω), on a $T_1(K)/T_1(\mathcal{O}) \simeq Y_1$ et on note $G(K)_1$ le sous-groupe distingué $G(K)_1 = \delta^{-1}(T_1(\mathcal{O}))$ de $G(K)$, donc $G(K)/G(K)_1 \simeq Y_1$. Si $T_f(K)_1 = T_f(K) \cap G(K)_1$, on a $T_f(K)/T_f(K)_1 \simeq Y_1$.

On sait que l'image $\nu(N(K))$ de $N(K)$ dans le groupe des automorphismes affines de $A_f = \mathbb{A}$ est $W_Y = W^v \ltimes Y$, que $\nu(T_f(K)) = Y$ et que Ker$\nu = H = T_f(\mathcal{O})$. En fait $N(K) \cap G(K)_1$ a pour image (par ν) $W = W^v \ltimes Q^\vee$; en effet, comme δ est trivial sur les sous-groupes radiciels de G, $G(K)_1$ contient des représentants dans $N(K)$ de générateurs de W^v.

On sait qu'un point ou un germe de quartier a un bon fixateur [13 ; sect 4.1 et 4.2.4] et qu'un point et un germe de quartier sont toujours contenus dans un même appartement [*l.c.* ; sect 4.3.3], le lemme suivant montre donc que $G(K)_1$ est transitif sur $\mathcal{A}$. Comme le stabilisateur dans $G(K)_1$ de A_f est $N(K) \cap G(K)_1$ qui agit sur A_f via W, il est clair que chaque appartement de $\mathcal{I}$ est muni d'une unique structure d'appartement de type $\mathbb{A}$ (au sens de 1.13) et que tout élément de $G(K)_1$ induit un isomorphisme d'un appartement quelconque de $\mathcal{I}$ sur son image.

Lemme 6.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{A}$ un filtre qui a un assez bon fixateur, alors $G_\Omega = \widehat{P}_\Omega$ est contenu dans $G(K)_1$, en particulier il induit un isomorphisme entre un appartement et son image. Bien sûr G_Ω permute transitivement les appartements contenant Ω.*

Démonstration. On a $G_\Omega = (G_\Omega \cap U^+).(G_\Omega \cap U^-).\widehat{N}_\Omega$ (à l'échange de $+$ et $-$ près). On sait que δ est trivial sur U^+ et U^-, il suffit donc de voir que $\widehat{N}_\Omega \subset G(K)_1$. Mais $\nu(\widehat{N}_\Omega) = \widehat{N}_\Omega/H$ est le fixateur de Ω dans W_Y, on doit montrer qu'il est dans W. Soit $w = w^v.y \in W_Y = W^v \ltimes Y$ (avec $y \in Y$ et $w^v \in W^v$) qui fixe un point x de $\mathbb{A}$; comme w^v fixe x à $Q^\vee \otimes \mathbb{R}$ près, y doit être dans $Y \cap (Q^\vee \otimes \mathbb{R}) = Q^\vee$: on a bien $w \in W = W^v \ltimes Q^\vee$. $\square$

6.4. Groupe parabolique associé à une facette vectorielle F^v de $\mathbb{A}$

On associe à F^v un ensemble parabolique de racines $\Phi(F^v) = \Phi^m(F^v) \cup \Phi^u(F^v)$ avec $\Phi(F^v) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(F^v) \geq 0\}$, $\Phi^m(F^v) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(F^v) = 0\} = \{\alpha \in \Phi \mid F^v \subset M^v(\alpha)\}$ et $\Phi^u(F^v) = \Phi(F^v) \setminus \Phi^m(F^v)$. On en déduit des sous-groupes de $G(K)$:

- le sous-groupe parabolique $P(F^v)$ est engendré par $T_f(K)$ et les $U_\alpha(K)$ pour $\alpha \in \Phi(F^v)$,

- son facteur de Lévi $M(F^v)$ est engendré par $T_f(K)$ et les $U_\alpha(K)$ pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$,

- son radical unipotent $U(F^v)$ est le plus petit sous-groupe normal de $P(F^v)$ contenant les $U_\alpha(K)$ pour $\alpha \in \Phi^u(F^v)$,

et on a la décomposition en produit semi-direct $P(F^v) = M(F^v) \ltimes U(F^v)$, *cf.* [28 ; 1.7] ou [24 ; 6.2].

Si on suppose F^v dans l'adhérence de la chambre fondamentale positive C_f^v, $U(F^v)$ est aussi le plus petit sous-groupe normal de $U^+(K)$ contenant les $U_\alpha(K)$ pour $\alpha \in \Phi^u(F^v)$ [24 ; 6.2]. On a donc $U(F^v) \subset U^+(K) \cap U^{max}(\Phi^u(F^v)) = G(K) \cap U^{max}(\Phi^u(F^v)) = U^{pmax}(\Phi^u(F^v))$, *cf.* [13 ; sect. 3.3.3].

D'après la définition par générateurs et relations des groupes de Kac-Moody [24 ; 8.3.3] $M(F^v)$ est le (ou au moins un quotient du) groupe de Kac-Moody $G_{F^v}(K)$ de système générateur de racines $(A(J), X, Y, (\alpha_i)_{i\in J}, (\alpha_i^\vee)_{i\in J})$ si $F^v = F^v(J)$. Si $F^v = V_0$, on a $M(F^v) = G(K)$ et $U(F^v) = \{1\}$. Si F^v est sphérique, $\Phi^m(F^v)$ est fini et $M(F^v)$ est un groupe réductif, *cf.* [24 ; 12.5.2] ou [28 ; 1.7].

6.5. Facette microaffine et groupe parahorique associés à une cheminée

Soit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(F, F^v)$ une cheminée de $\mathbb{A}$ associée à une facette $F = F(x, F_0^v)$ et une facette vectorielle F^v.

À F^v, on associe l'ensemble $\mathcal{M}^{\Phi^m(F^v)}$ des murs de $\mathcal{M}$ de direction $\mathrm{Ker}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Phi^m(F^v)$ et l'appartement affine $\mathbb{A}^{F^v}$ de $G_{F^v}(K)$ correspondant au choix dans $\mathbb{A}$ des murs de $\mathcal{M}^{\Phi^m(F^v)}$ et des murs imaginaires de direction contenant F^v. À la cheminée $\mathfrak{r}$, on associe la facette microaffine $F^\mu = F^\mu(\mathfrak{r}) = (\mathcal{F}, F^v)$ où $\mathcal{F} = F_{\Phi^m(F^v)}(x, F_0^v)$ est la facette engendrée par F dans $\mathbb{A}^{F^v}$. Ainsi $\overline{\mathcal{F}}$ est le filtre des parties de $\mathbb{A}$ contenant une intersection de demi-espaces $D(\alpha, k)$ de $\mathbb{A}^{F^v}$ (*i.e.* pour $\alpha \in \Delta$, $\alpha(F^v) = 0$ et $k \in \Gamma_\alpha$) contenant F ; en particulier $\overline{\mathcal{F}} \supset \mathfrak{r}$.

Le sous-groupe parahorique $P^\mu(\mathfrak{r}) = P(F^\mu)$ est le produit semi-direct $P(F^\mu) = M(F, F^v) \ltimes U(F^v)$ où $M(F, F^v)$ est le (ou l'image dans $M(F^v)$ du) sous-groupe $\widehat{P}_{\mathcal{F}}$ de $G_{F^v}(K)$ associé à la facette $\mathcal{F}$ dans [13].

Remarques. 1) Si $F^v = V_0$, alors $\mathcal{F} = F$ et $P(F^\mu) = M(F, F^v) = \widehat{P}_F$.

2) F^μ n'est une vraie facette microaffine (au sens de [28 ; 2.5]) que si F^v est sphérique *i.e.* $\mathfrak{r}$ évasée. Dans ce cas $\mathfrak{F}$ est une facette de l'appartement de Bruhat-Tits $\mathbb{A}^{F^v}$ du groupe réductif $M(F^v)$; comme nous avons supposé la valuation discrète, c'est même un sous-ensemble de $\mathbb{A}^{F^v}$ (un polysimplexe).

3) En fait $\mathcal{F}$, F^μ, $M(F,F^v)$ et $P^\mu(\mathfrak{r})$ ne dépendent que du germe $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{r}$.

4) Le groupe $P^\mu(\mathfrak{r})$ n'est parahorique qu'en un sens généralisé, celui de [28 ; 2.10] si $\mathfrak{r}$ est évasée. En fait $M(F,F^v)$ est un sous-groupe parahorique de $M(F^v)$ (*cf.* [13 ; sect. 3.7]), au sens classique si $\mathfrak{r}$ est évasée.

Proposition 6.6. *Le groupe $P^\mu(\mathfrak{r})$ fixe (point par point) le germe de cheminée $\mathfrak{R}$.*

N.B. Il n'est pas sûr que $U(F^v) = U^+(K)\cap U^{max}(\Phi^u(F^v))$ et pas plus évident que $U^+(K)\cap U^{max}(\Phi^u(F^v))$ fixe $\mathfrak{R}$.

Démonstration.

Supposons F^v dans l'adhérence de la chambre fondamentale C^v_f ; alors un élément u_0 de $U(F^v)$ est un produit fini de conjugués $v_iu_iv_i^{-1}$ avec $v_i\in U^+(K) = U(C^v_f)$, $u_i\in U_{\alpha_i}(K)$, $\alpha_i\in\Phi^u(F^v)\subset\Phi^+$; de même les v_i sont des produits finis d'éléments $u_{i,j}\in U_{\beta_{i,j}}(K)$ avec $\beta_{i,j}\in\Phi^+$. Donc il existe $y\in\mathbb{A}$ tel que $u_i\in U_{\alpha_i,y}$ et $u_{i,j}\in U_{\beta_{i,j},y}$, $\forall i,j$. Ainsi $u_0\in U_y^{pm}(\Phi^u(F^v))$ d'après les relations de commutation dans le groupe complété $U^{max}(\Phi^+)$. Il est alors clair que u_0 fixe (point par point) $\mathfrak{r}(F+\xi,F^v)$ pour un bon choix de $\xi\in F^v$. Par ailleurs $M(F,F^v)$ fixe la facette-fermée $\overline{\mathcal{F}}$ qui contient $\mathfrak{r}(F,F^v)$ et donc $\mathfrak{r}(F+\xi,F^v)$. $\square$

Proposition 6.7. *Soient $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}(F_1,F_1^v)$ et $\mathfrak{R}_2=\mathfrak{R}(F_2,F_2^v)$ deux germes de cheminées de $\mathbb{A}$ avec $\mathfrak{R}_1$ évasé, alors* $\quad G(K)=P^\mu(\mathfrak{R}_1).N(K).P^\mu(\mathfrak{R}_2)$.

Remarques. 1) Ceci constitue une décomposition de Bruhat ou Birkhoff mixte, *cf.* 2.1 et [28 ; 3.5] ou même une décomposition d'Iwasawa mixte quand $\mathfrak{R}_2$ est dégénéré en particulier une facette fermée.

2) D'après la démonstration ci-dessous, il suffit en fait de supposer que, $\forall w\in W^v$, $\Phi^m(F_1^v)\cap w\Phi^m(F_2^v)$ est fini (au lieu de $\mathfrak{R}_1$évasé *i.e.* $\Phi^m(F_1^v)$ fini).

3) On développe ici la remarque 4.6 de [13].

Démonstration.

D'après la décomposition de Bruhat ou de Birkhoff de $G(K)$, pour tout $g\in G(K)$ il existe $n\in N(K)$ tel que $g\in P(F_1^v)nM(F_2^v)U(F_2^v)$. Mais $\Phi(n^{-1}F_1^v)\cap\Phi^m(F_2^v)$ est un système parabolique de racines dans $\Phi^m(F_2^v)$ (associé à la facette $cl_{\Phi^m(F_2^v)}(n^{-1}F_1^v)$). La décomposition d'Iwasawa de $M(F_2^v)$ [13 ; prop. 3.6] donne donc: $M(F_2^v) = (M(F_2^v)\cap P(n^{-1}F_1^v)).(N(K)\cap M(F_2^v)).M(F_2,F_2^v)$. Ainsi

$g \in P(F_1^v)N(K)M(F_2, F_2^v)U(F_2^v)$ et il existe $m \in M(F_1^v)$, $n_1 \in N(K)$ tels que $g \in U(F_1^v)mn_1P^\mu(\mathfrak{R}_2) = U(F_1^v)mP^\mu(n_1\mathfrak{R}_2)n_1$.

Mais $\Phi(n_1F_2^v) \cap \Phi^m(F_1^v)$ est un système parabolique de racines dans $\Phi^m(F_1^v)$ (associé à la facette $cl_{\Phi^m(F_1^v)}(n_1F_2^v)$). La décomposition d'Iwasawa de $M(F_1^v)$ donne : $M(F_1^v) = M(F_1, F_1^v).(N(K) \cap M(F_1^v)).M(n_1F_2^v, F_1^v).(U(n_1F_2^v) \cap M(F_1^v))$, où on note $M(n_1F_2^v, F_1^v)$ le sous-groupe de $M(F_1^v)$ associé au sous-système de racines $\Phi^m(n_1F_2^v) \cap \Phi^m(F_1^v)$ (par hypothèse ce système de racines est fini, donc $M(n_1F_2^v, F_1^v)$ est un groupe réductif). Il existe donc $n_2 \in N(K) \cap M(F_1^v)$ tel que:

$$m \in n_2M(n_2^{-1}F_1, n_2^{-1}F_1^v = F_1^v).M(n_1F_2^v, F_1^v).(U(n_1F_2^v) \cap M(F_1^v)).$$

La facette $n_2^{-1}F_1$ engendre une facette F_1' de $\mathbb{A}$ pour $\Phi^m(n_1F_2^v) \cap \Phi^m(F_1^v)$ *i.e.* pour $M(n_1F_2^v, F_1^v)$. Le sous-groupe $M(F_1')$ correspondant de $M(n_1F_2^v, F_1^v)$ vérifie donc $M(F_1') \subset M(n_2^{-1}F_1, F_1^v)$. De même la facette n_1F_2 engendre une facette F_2' de $\mathbb{A}$ pour $\Phi^m(n_1F_2^v) \cap \Phi^m(F_1^v)$ *i.e.* pour $M(n_1F_2^v, F_1^v)$. Le sous-groupe $M(F_2')$ correspondant de $M(n_1F_2^v, F_1^v)$ vérifie donc $M(F_2') \subset M(n_1F_2, n_1F_2^v)$.

La décomposition de Bruhat-Iwahori classique dans le groupe réductif $M(n_1F_2^v, F_1^v)$ (contenu dans $M(F_1^v)$) donne donc :

$$\begin{aligned} M(n_1F_2^v, F_1^v) &\subset M(F_1').(N(K) \cap M(n_1F_2^v, F_1^v)).M(F_2') \\ &\subset M(n_2^{-1}F_1, F_1^v).N(K).M(n_1F_2, n_1F_2^v). \end{aligned}$$

Ainsi $m \in n_2M(n_2^{-1}F_1, F_1^v).N(K).M(n_1F_2, n_1F_2^v).U(n_1F_2^v)$

$$= M(F_1, F_1^v).N(K).P^\mu(n_1\mathfrak{R}_2),$$

et $g \in U(F_1^v).M(F_1, F_1^v).N(K).P^\mu(n_1\mathfrak{R}_2)n_1 = P^\mu(\mathfrak{R}_1).N(K).P^\mu(\mathfrak{R}_2)$. □

Proposition 6.8. *Soit $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(F, F^v)$ une cheminée solide de $\mathbb{A}$. Alors $\mathfrak{r}$ et son germe $\mathfrak{R}$ ont de bons fixateurs. Plus précisément si $\mathfrak{r}$ est évasée et F^v est dans l'adhérence de la chambre vectorielle fondamentale, ces bons fixateurs sont $G_\mathfrak{r} = \widehat{N}_\mathfrak{r}.U_{F+F^v}^{nm-}.U_F^{pm+} = M(F, F^v).U_F^{pm}(\Phi^u(F^v))$ et $G_\mathfrak{R} = M(F, F^v).U(F^v) = P^\mu(\mathfrak{R})$*

Remarque. Une face de quartier sphérique $\mathfrak{f} = x + F^v$ et son germe (à l'infini) $\mathfrak{F}$ ont aussi de bons fixateurs. Il suffit, dans la démonstration ci-dessous, de remplacer F par $\{x\}$ et $cl(F \cup (F + n\xi))$ par $cl(\{x, x + n\xi\}) \cap supp(x + F^v)$.

Démonstration.

On choisit $\xi \in F^v$ et une chambre vectorielle fermée $\overline{C^v}$ contenant $-F^v$. Pour $n \in \mathbb{N}$ les facettes $F = F(x, F_0^v)$ et $F_n = F(x + n\xi, F_0^v)$ ont un bon fixateur [13 ;

sect. 4.2.2] ; de plus $F \subset F_n + \overline{C^v}$ et $F_n \subset F - \overline{C^v}$. D'après [*l.c.* ; rem. 4.4 et prop. 4.3 1)], $F \cup F_n$ et $cl(F \cup F_n)$ ont de bons fixateurs. Mais pour $n > 0$, le fixateur dans $W^e_{\mathbb{R}}$ de $cl(F \cup F_n)$ est fini (puisque $\mathfrak{r}$ est solide), donc $\mathfrak{r} = \cup_n\, cl(F \cup F_n)$ et $\mathfrak{R} = germ_\infty(\mathfrak{r})$ ont de bons fixateurs [*l.c.* ; prop. 4.3 3) et 2)].

Il reste à identifier ces bons fixateurs quand $\mathfrak{r}$ est évasée. On a $G_{\mathfrak{r}} = \widehat{N}_{\mathfrak{r}}.U^{nm-}_{F+F^v}.U^{pm+}_F$. Mais $U^{max}_F(\Phi^+) = U^{max}_F(\Phi^{m+}(F^v)) \ltimes U^{max}_F(\Phi^u(F^v))$ et, par hypothèse, $\Phi^m(F^v)$ est fini, donc $U^{pm+}_F = V^+_F \ltimes U^{pm}_F(\Phi^u(F^v))$ où V^+_F est le groupe U^+_F (défini dans [*l.c.* ; sect. 3.2]) relatif au groupe réductif $M(F^v)$. De plus $U^{nm-}_{F+F^v}$ est le groupe V^-_F (*i.e.* le U^-_F relatif à ce groupe $M(F^v)$). Enfin $\widehat{N}_{\mathfrak{r}}$ est le $\widehat{N}_F$ relatif à ce groupe $M(F^v)$. Ainsi $G_{\mathfrak{r}} = \widehat{N}_{\mathfrak{r}}.V^-_F.V^+_F.U^{pm}_F(\Phi^u(F^v)) = M(F,F^v).U^{pm}_F(\Phi^u(F^v))$. Le résultat pour $G_{\mathfrak{R}}$ est maintenant clair, d'après 6.6. □

6.9. Conséquences

1) L'axiome (MA2) est vérifié : d'après [13 ; sect 4.1 et 4.2] un point, un germe d'intervalle préordonné (*cf.* sect. 4.4 et prop. 4.3 1) et 2) de *l.c.*) et une demi-droite générique ont de bons fixateurs. On vient de voir en 6.8 que c'est aussi vrai pour une cheminée solide. D'après [*l.c.* ; remark 4.2 et prop. 4.3.1] un sous-groupe de ce bon fixateur fixe l'enclos de cette partie F et est transitif sur les appartements contenant F. D'après le lemme 6.3, G_F induit des isomorphismes entre ces appartements.

2) L'axiome (MA3) est vérifié : on a $G(K) = G_{\mathfrak{R}}.N(K).G_F$ d'après 6.6 et 6.7. Vue la transitivité de $G_{\mathfrak{R}}$ ou G_F sur les appartements contenant $\mathfrak{R}$ ou F (si F est une facette ou une cheminée solide) un raisonnement classique prouve l'axiome (MA3).

Il reste à vérifier l'axiome (MA4).

Proposition 6.10. *Soient $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}(F_1, F^v_1)$ et $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}(F_2, F^v_2)$ deux germes de cheminées de $\mathbb{A}$ et $\Omega = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$. On suppose que $\mathfrak{R}_1$ est évasé et que $\mathfrak{R}_2$ a un bon fixateur (ce qui est en particulier vérifié si $\mathfrak{R}_2$ est solide ou une facette). Alors Ω a un assez bon fixateur, le groupe G_Ω fixe l'enclos de Ω et agit transitivement sur les appartements contenant Ω.*

Si de plus $\mathfrak{R}_2$ est évasé, alors Ω a un bon fixateur.

Démonstration.

On sait qu'un germe de cheminée solide ou une facette a un bon fixateur (6.8 et [13 ; sect. 4.2.2]).

On note $\overline{C_1^v}, \ldots, \overline{C_n^v}$ les chambres vectorielles fermées contenant F_1^v (en nombre fini car F_1^v est sphérique). La réunion $\Theta_1 = \overline{C_1^v} \cup \cdots \cup \overline{C_n^v}$ contient un cône ouvert contenant F_1^v. Mais $\overline{F_1}$ est borné (à V_0 près) donc, pour x quelconque et $\xi \in F_1^v$ assez grand, on a : $\overline{F_1} + \xi \subset x + \Theta_1$ et $\mathfrak{r}(F_1, F_1^v) + \xi \subset x + \Theta_1$. Ainsi $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 + \Theta_1$. D'après la proposition 4.3 4) de *loc. cit.* , Ω a un assez bon fixateur et le groupe G_Ω a les propriétés annoncées.

Si de plus $\mathfrak{R}_2$ est évasé, on note Θ_2 l'ensemble analogue à Θ_1 associé à F_2^v. On a $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 + \Theta_1$ et $\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{R}_1 + \Theta_2$. Mais $\mathfrak{r}(F_2, F_2^v) - \Theta_2 = \mathbb{A}$, donc $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 - \Theta_2$. Ainsi la remarque 4.4 de *loc. cit.* montre (en différenciant les cas où F_1^v et F_2^v sont de signes contraires ou opposés) que Ω a un bon fixateur. $\square$

Théorème 6.11. *Sous la condition (SC) de 6.1, les masures construites dans loc. cit. sont des masures affines, ordonnées, épaisses et semi-discrètes (au sens de cet article).*

Démonstration.

On a déjà vu l'axiome (MA1) en 6.2 et les axiomes (MA2), (MA3) en 6.9. Pour (MA4), si deux appartements A et $A_f = \mathbb{A}$ contiennent $\mathfrak{R}$ et F, alors A est transformé de $\mathbb{A}$ par un élément g de $G_{\mathfrak{R}\cup F}$ qui fixe $cl_{\mathbb{A}}(\mathfrak{R} \cup F)$. Ainsi $A \cap \mathbb{A}$ contient $cl_{\mathbb{A}}(\mathfrak{R} \cup F)$. De plus $g \in G_{\mathfrak{R}}$; d'après le lemme 6.3, g induit donc un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur A fixant $cl_{\mathbb{A}}(\mathfrak{R} \cup F)$.

Pour l'axiome (MAO), si $x \le y$ dans $\mathbb{A}$, on sait que $\{x, y\}$ a un bon fixateur et $G_{\{x,y\}}$ fixe $[x, y]_{\mathbb{A}}$ [*l.c.* ; sect. 4.2.1]. Donc, pour tout appartement A contenant x et y, on a : $[x, y]_A = [x, y]_{\mathbb{A}}$.

On a indiqué en 6.1 que $\mathbb{A}$ est semi-discret.

Si C est une chambre de $\mathbb{A}$ de mur $M(\alpha, k)$ avec $C \subset D(\alpha, k)$, on a vu en [*l.c.* ; sect. 4.3.4] que $U_{\alpha,k}$ agit transitivement sur les chambres de $\mathcal{I}$ adjacentes à la chambre C le long de $\overline{C} \cap M(\alpha, k)$. De plus $U_{\alpha,k+1}$ est le fixateur dans $U_{\alpha,k}$ de celle de ces chambres qui est contenue dans $\mathbb{A}$. Enfin par construction $U_{\alpha,k}/U_{\alpha,k+1}$ est un groupe isomorphe à $(\kappa, +)$. Ainsi la cloison $\overline{C} \cap M(\alpha, k)$ est dominée par une infinité de chambres. $\square$

Remarque 6.12. Les masures construites dans *loc. cit.* ont des propriétés que ne possèdent pas forcément toutes les masures affines définies ici. Par exemple on a montré en [*l.c.* ; sect 4.3.3], comme conséquence de la décomposition d'Iwasawa, qu'un germe de quartier et un germe de segment sont toujours dans un même appartement, même si ce germe de segment n'est pas préordonné.

References

[1] Peter Abramenko, *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups*, Lecture notes in Math. **1641** (Springer, Berlin, 1996).

[2] Peter Abramenko et Kenneth S. Brown, *Buildings: theory and applications*, Graduate Texts in Math. **248** (Springer, Berlin, 2008).

[3] Nicole Bardy, *Systèmes de racine infinis*, Mémoire **65** (Soc. Math. France, 1996).

[4] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres IV, V, VI (Hermann, Paris, 1968).

[5] Paul Broussous, *Simplicial complexes lying equivariantly over the affine building of* $GL(N)$, *Math. Annalen* **329** (2004), 495-511.

[6] Kenneth S. Brown, *Buildings* (Springer, Berlin, 1989).

[7] François Bruhat et Jacques Tits, Groupes réductifs sur un corps local I , Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.É.S.* **41** (1972), 5-251.

[8] Cyril Charignon, *Compactifications polygonales d'un immeuble affine*, preprint Nancy (2009), arXiv:0903.0502.

[9] Cyril Charignon, *Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local*, preprint Nancy (2010), arXiv:0912.0442v3.

[10] Vinay V. Deodhar, A note on subgroups generated by reflections in Coxeter groups, *Arch. Math.* **53** (1989), 543-546.

[11] Howard Garland, A Cartan decomposition for p-adic loop groups, *Math. Ann.* **302** (1995), 151-175.

[12] Paul Garrett, *Buildings and classical groups*, Chapman and Hall (1997).

[13] Stéphane Gaussent et Guy Rousseau, Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 2605-2657.

[14] Jean-Yves Hée, Sur une courte note de V.V. Deodhar, 5 pages (1990) in Thèse d'état, Université Paris Sud Orsay (1993). Sur http://www.iecn.u-nancy.fr/∼rousseau/Textes/

[15] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in adv. Math. **29** (Cambridge U. Press, Cambridge, 1990).

[16] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Troisième édition, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1990).

[17] Bruce Kleiner et Bernhard Leeb, Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and euclidean buildings, *Publ. Math. I.H.É.S.* **86** (1997), 115-197.

[18] Erasmus Landvogt, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Springer lecture note in Math. **1619** (1996).

[19] Robert Moody et Arturo Pianzola, *Lie algebras with triangular decompositions*, Wiley-Interscience (1995).

[20] Bernhard Mühlherr, Locally split and locally finite twin buildings of 2-spherical type, *J. reine angew. Math.* **511** (1999), 119-143.

[21] Bernhard Mühlherr, Twin buildings, in *Tits buildings and the model theory of groups, Wűrzburg (2000)*, K. Tent éditrice, London Math. Soc. lecture note **291** Cambridge U. Press (2002), 103-117.

[22] Bernhard Mühlherr et Mark Ronan, Local to global structure in twin buildings, *Inventiones Math.* **122** (1995), 71-81.

[23] Anne Parreau, Immeubles affines: construction par les normes et étude des isométries, *Contemporary Math.* **262** (2000), 263-302.

[24] Bertrand Rémy, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).

[25] Mark A. Ronan, *Lectures on buildings*, Perspectives in Math. **7** Academic Press (1989).

[26] Guy Rousseau, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse d'état, Université Paris-Sud Orsay (1977). Sur http://www.iecn.u-nancy.fr/∼rousseau/Textes/

[27] Guy Rousseau, Exercices métriques immobiliers, *Indag. Math.* **12** (2001), 383-405.

[28] Guy Rousseau, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines *Compositio Mathematica* **142** (2006), 501-528.

[29] Guy Rousseau, Euclidean buildings, In "Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités", école d'été, Grenoble, 14 juin-2 juillet 2004, *Séminaires et congrès* **18**, Soc. Math. France (2009), 77-116.

[30] Guy Rousseau, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local 2, masures ordonnées, preprint Nancy, Janvier 2010. Sur http://www.iecn.u-nancy.fr/∼rousseau/Textes/

[31] Rudolf Scharlau, Buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, Elsevier (1995), 1085-1114.

[32] Jacques Tits, *Buildings of spherical type and finite BN pairs*, Springer lecture note in Math. **386** (1974).

[33] Jacques Tits, Immeubles de type affine, in *Buildings and the geometry of diagrams, Como (1984)*, Springer lecture note in Math. **1181** (1986), 159-190.

[34] Jacques Tits, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, *J. of Algebra* **105** (1987), 542-573.

[35] Jacques Tits, Sur le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter, *J. of Algebra* **113** (1988), 346-357.

[36] Jacques Tits, Immeubles jumelés I, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France* (1989), 81-96.

[37] Jacques Tits, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in *Groups combinatorics and geometry, Durham (1990)*, Liebeck et Saxl éditeurs, London Math. Soc. lecture note **165**, Cambridge U. Press (1992), 249-286.

[38] Jacques Tits et Richard M. Weiss, *Moufang Polygons*, Springer monographs in Math. (2003).

[39] Richard M. Weiss, *The structure of spherical buildings*, (Princeton U. Press, Princeton, 2003).

[40] Richard M. Weiss, *The structure of affine buildings*, Annals of Math. studies **168** (Princeton U. Press, Princeton, 2009).

Guy Rousseau
Institut Élie Cartan
Unité mixte de Recherche 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA
B.P. 70239
54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex
France
Email: rousseau@iecn.u-nancy.fr