Mathematical Research Letters **4**, 667–677 (1997)

ANALYTICITE GLOBALE DE LA SOLUTION CANONIQUE DE $\bar{\partial}_b$ POUR UNE CLASSE D'HYPERSURFACES COMPACTES PSEUDOCONVEXES DE $\mathbb{C}^2$

Makhlouf Derridj

1. Introduction

La question de la régularité analytique (aussi bien locale que globale) pour des opérateurs différentiels ou des problèmes aux limites se révèle au fur et à mesure des résultats obtenus (aussi bien positifs que négatifs) très différente de celle de la régularité C^∞. Les opérateurs "somme de carrés de champs de vecteurs" de L. Hörmander [13] se sont révélés, depuis le contre–exemple simple, et surprenant à son époque, de M. S. Baouendi-C. Goulaouic [1], contenir des classes hypoelliptiques analytiques et d'autres qui ne le sont pas (voir par exemple [3, 12, 14, 19, 20, 22]).

Cela n'empêcha pas d'espérer plutôt des résultats positifs dans le cas de $\bar{\partial}_b$ ou du problème $\bar{\partial}$–Neumann. Dans le cas global les premiers résultats remontent à 1975–1976 ([9, 18, 23]) dans le cas strictement pseudoconvexe ou plus généralement dans le cas non dégénéré et à 1977 pour des cas où la forme de Levi dégénère [8]. La régularité analytique locale pour $\Box_b$ où le problème $\bar{\partial}$–Neumann a été montré en 1978 indépendamment par D. Tartakoff [25] et F. Trèves [27], dans le cas non dégénérée. Ces travaux ont ensuite donné naissance (après une certaine pause) à une série de travaux sur l'analyticité que nous ne pouvons malheureusement pas tous citer ([2, 3, 6, 9, 10], etc...).

Concernant l'analyticité pour la solution canonique de $\bar{\partial}_b$ dans $\mathbb{C}^2$, le cas non dégénéré relève de travaux (dans le cadre microlocal) de ([26, 27, 28]) (dans un cadre où la forme de Levi dégénère, voir [11]). Mais un contre–exemple, dans le cas faiblement pseudoconvexe a été donné dans [7].

Les résultats positifs pour l'analyticité globale doivent, a priori, être plus aisés à obtenir (voir [2, 8, 10]) et maints mathématiciens ont pensé que l'analyticité de la solution canonique de $\bar{\partial}_b$ sur une hypersurface compacte, régulière, de classe C^ω, et pseudoconvexe de $\mathbb{C}^2$, est concevable. Cependant, dans un récent et joli papier, M. Christ a montré qu'on n'a pas toujours analyticité globale pour de telles hypersurfaces ([4]). Dans ce travail, nous considérons une classe d'hypersurfaces pour laquelle nous obtenons un résultat positif d'analyticité globale. Cette classe est en quelque sorte l'analogue global d'une classe pour laquelle la question de l'analyticité locale a été posée dans les dernières années.

Received April 6, 1996.

Pour être plus précis, considérons, dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2_{(w,z)}$, une hypersurface S, donnée par $S = \{\mathcal{R}\mathrm{e}\ w + \varphi(z) = 0\}$, où φ est une fonction réelle, sous–harmonique et de classe C^ω dans un voisinage de 0. Il a été pressenti que la condition

$$\{\Delta\varphi = 0\} = \{z = 0\}$$

est suffisante pour que la solution canonique de $\bar{\partial}_b$ pour S est analytique réelle près de 0, si le second membre l'est.

A ma connaissance, cela reste une question ouverte. Nous considérons dans ce travail un analogue global que nous noterons encore S :

$$\begin{cases} S = \partial\Omega \ \text{ où } \ \Omega = \left\{ \mid w \mid^2 + \rho(z,\bar{z}) < 0 \right\} \subset \mathbb{C}^2_{w,z} \\ \text{avec } \ \rho \ \text{ sousharmonique, } \ \rho \in C^\omega(\mathbb{C}) \\ \Omega \ \text{ est borné et régulier.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque. On n'exige pas ici $\{\Delta\rho = 0\} = \{z = 0\}$. Ceci est suppléé par la compacité de S.

Nous avons alors le

Theoreme principal. *Soit u solution canonique de $\bar{\partial}_b u = f$ dans S (donnée par (1.1)), avec $f \in C^\omega(S)$. Alors $u \in C^\omega(S)$.*

Remarque. Un tel théorème prend du relief avec le récent résultat de M. Christ donnant des contre–exemples à la régularité analytique globale ([4]).

On verra que la démonstration n'exige pas d'outils sophistiqués. Par contre nous pensons que le cas local, analogue, doit en nécessiter de plus performants.

Nous considèrerons, dans un prochain travail, le cas de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$.

Il se peut que les méthodes de M. Christ [5] s'appliquent à notre cas. Notre démonstration est directe (sans microlocalisation) et utilise l'existence d'un champ global T qui "commute bien" avec $\bar{\partial}_b$ mais qui peut avoir des singularités.

2. Quelques notations et définitions. Premiers lemmes

Nous prenons comme champ holomorphe L, définissant la structure de Cauchy-Riemann sur S (donné par (1.1) avec $S = \partial\Omega$) le champ :

$$L = 2\left(\bar{w}\partial_z - \rho_z\partial_w\right) = \left(u - iv\right)\left(\partial_x - i\partial_y\right) - \frac{1}{2}\left(\rho_x - i\rho_y\right)\left(\partial_u - i\partial_v\right).$$

Nous notons X et Y les parties réelle et imaginaire de L

$$\begin{cases} X = u\partial_x - v\partial_y - \dfrac{1}{2}\rho_x\partial_u + \dfrac{1}{2}\rho_y\partial_v \\ Y = -\left(v\partial_x + u\partial_y\right) + \dfrac{1}{2}\rho_y\partial_u + \dfrac{1}{2}\rho_x\partial_v. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans toute la suite, on notera T le champ suivant

$$T = v\partial_u - u\partial_v. \tag{2.2}$$

On s'aperçoit que T est un champ analytique réel qui est tangent à S, mais qui peut s'annuler sur S. Nous allons donner des précisions.

Lemme 2.1. *T est tangent àS. Si on note$F = \{T = 0\} \cap S$, alors$F$ est le compact donné par$F = S \cap \{w = 0\}$. De plus on a l'égalité*

$$[T, L] = iL. \tag{2.3}$$

Démonstration. On a

$$T\left(u^2 + v^2 + \rho\right) = T\left(u^2 + v^2\right) = 2uv - 2uv = 0.$$

De plus $T = 0 \Leftrightarrow u = v = 0$, i.e. $\{T = 0\} = \{w = 0\}$ entraînant que F est le compact $S \cap \{w = 0\}$.

Pour établir (2.3), on calcule $[T, X]$ et $[T, Y]$

$$\begin{aligned}
[T, X] &= \left[v\partial_u - u\partial_v,\ u\partial_x - v\partial_y - \frac{1}{2}\rho_x\partial_u + \frac{1}{2}\rho_y\partial_v\right] \\
&= v\partial_x + u\partial_y - \frac{1}{2}\rho_y\partial_u - \frac{1}{2}\rho_x\partial_v = -Y \\
[T, Y] &= \left[v\partial_u - u\delta_v,\ -v\partial_x - u\partial_y + \frac{1}{2}\rho_y\partial_u + \frac{1}{2}\rho_x\partial_v\right] \\
&= u\partial_x - v\partial_y - \frac{1}{2}\rho_x\partial_u + \frac{1}{2}\rho_y\partial_v = X. \quad \text{Alors} \\
[T, L] &= [T, X] + i[T, Y] = iX - Y = i(X + iY) = iL.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant regarder comment se situe F par rapport à l'ensemble de dégénérescence de la forme de Levi.

Lemme 2.2. *Soit$E \subset S$ l'ensemble de dégénérescence de la forme de Levi. Alors$E$ et$F$ sont deux compacts disjoints de$S$. Plus précisément*

$$E \subset \{\Delta\rho = 0\} \cap \{w \neq 0\}.$$

Démonstration. Notons λ la fonction de Levi (associée à L). Alors

$$\lambda = \mid \rho_z \mid^2 + 4\Delta\rho \cdot \mid w \mid^2 \geq 0.$$

On obtient ainsi : $\lambda = 0 \Leftrightarrow \left\{\rho_z = 0\ ;\ \Delta\rho \cdot \mid w \mid^2 = 0\right\}$. Comme S est régulière on a $\mid w \mid^2 + \mid \rho_z \mid^2 \neq 0$ sur S. Donc si $\rho_z(p) = 0$, $p \in S$, on a $w(p) \neq 0$. On déduit

$$\{\lambda(p) = 0,\ \rho_z(p) = 0,\ p \in S\} \Rightarrow \{\Delta\rho(z(p)) = 0,\ w(p) \neq 0\}. \tag{2.4}$$

Evidemment E est compact. Comme $F = S \cap \{w = 0\}$ on obtient bien que E et F sont deux compacts disjoints.

Dans la suite, nous aurons besoin de certains rappels sur $\bar{\partial}_b$. Ici nous considérons $\bar{\partial}_b$ sur L^2 comme opérateur non borné où $L^2 = L^2(S)$. Evidemment si $f \in C^1(S)$, $\bar{\partial}_b f = \left(\bar{L}(f)\right)\bar{\omega}$, où $\bar{\omega}$ est la $(0,1)$ forme sur S duale du champ $\bar{L}$ et $\bar{L}(f)$ est au sens usuel.

D'autre part si A est une partie de $L^2(S)$, $A^\perp$ désigne l'orthogonal de A dans $L^2(S)$. Dans toute la suite, on identifie fréquemment $\bar{\partial}_b f$ avec $\bar{L}f$, dans les estimations. De plus on travaillera sur des éléments réguliers, i.e. de $C^\infty(S)$, en vertu des résultats de régularité C^∞ de J. J. Kohn ([16], [17]).

3. Propositions préliminaires à la démonstration du théorème

Dans la première proposition nous exploitons des propriétés des champs (T, L), en particulier lemme 2.1. Elle est semblable à celle figurant dans ([10]). (Voir aussi [21] dans un cadre plus compliqué).

Proposition 3.1. *Soit* $f \in (\mathrm{Ker}(\bar\partial_b))^\perp \cap C^1(S)$. *Alors* $Tf \in \left(\mathrm{Ker}(\bar\partial_b)\right)^\perp$.

*Démonstration.*Nous commençons par faire la remarque suivante : on a (où $(\ ,\ )$ est le produit dans $L^2(S)$) :

$$(Tf, g) = -(f, Tg) \quad \text{pour} \quad f, g \in C^1(S). \tag{3.1}$$

En effet

$$\left(v\frac{\partial \tilde f}{\partial u} - u\frac{\partial \tilde f}{\partial v}, \tilde g\right)_{L^2(\mathbb{C}^2)} = -\left(\tilde f, v\frac{\partial \tilde g}{\partial u} - u\frac{\partial \tilde f}{\partial g}\right)_{L^2(\mathbb{C}^2)}, \quad \tilde f, \tilde g \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2). \tag{3.2}$$

Il suffit alors de remarquer que $T(r) = 0$, où r est la fonction définissante : $r = u^2 + v^2 + \rho(x, y)$, et que si $f, g \in C^1(S)$, on peut les prolonger en $\tilde f, \tilde g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{C}^2)$.

A partir de là on opère de façon simple : soit $f \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp \cap C^1(S)$. Si $g \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right) \cap C^1(S)$ on a

$$\bar\partial_b Tg = \left(\bar L Tg\right)\bar\omega \quad \text{et} \quad \bar L Tg = \left[\bar L, T\right] g + T\bar L g$$
$$= i\bar L g + T\bar L g = 0.$$

Donc $g \in \mathrm{Ker}(\bar\partial_b) \Rightarrow Tg \in \mathrm{Ker}(\bar\partial_b)$. Ainsi

$$(Tf, g) = -(f, Tg) = 0 \quad \text{si} \quad f \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp \quad \text{et} \quad g \in \mathrm{Ker}(\bar\partial_b).$$

La proposition suivante se déduit de la précédente et du fait que $\bar\partial_b$ est l'image fermée ([15]).

Proposition 3.2. *Il existe une constante* $C > 0$, *t. q.*

$$\|T^n g\| \le C\left\|\bar\partial T^n g\right\|, \quad \forall g \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp \cap C^\infty(S), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Par récurrence on déduit de la proposition précédente que $T^n g \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp$ si $g \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp \cap C^\infty(S)$ et $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, puisque $\bar\partial_b$ est d'image fermée, on a que : $\exists C > 0$ t. q. $\| \alpha \| \le C \| \bar\partial_b \alpha \|$, $\forall \alpha \in \left(\mathrm{Ker}\ \bar\partial_b\right)^\perp \cap C^1(S)$. Alors (3.3) en découle.

La dernière proposition que nous établissons est liée à l'indépendance des champs X, Y, T sur $S\backslash F$.

Proposition 3.3. *Les champs X, Y, T sont indépendants sur $S\backslash F$.*

Démonstration. Il suffit d'expliciter les champs en question. Nous allons montrer que la matrice donnant l'expression des champs X, Y, T dans la base $(\partial_x, \partial_y, \partial_u, \partial_v)$, admet en tout point de $S\backslash F$, un mineur (3×3) non nul. Notons $\mathcal{M}$ cette matrice. Alors :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & -v & 0 \\ -v & -u & 0 \\ -\rho_x & \rho_y & v \\ \rho_y & \rho_x & -u \end{pmatrix}.$$

Soit $p \in S/F$. Alors soit $u(p) \neq 0$, soit $v(p) \neq 0$. Dans le premier cas, on considère le mineur :

$$\begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ -v & -u & 0 \\ \rho_y & \rho_x & -u \end{vmatrix} (p) = \left(u(u^2+v^2)\right)(p) = 0.$$

Dans le deuxième cas, on prend le mineur constitué des trois premières lignes de $\mathcal{M}$ et on trouve de façon analogue qu'il est non nul en un tel point.

4. Démonstration du théorème principal

Nous allons d'abord exploiter le lemme 2.2 en en tirant le corollaire suivant.

Corollaire 4.1. *Il existe deux fonctions φ, ψ dans $C^\infty(S)$ telles que*

(i) $0 \leq \varphi \leq 1$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\varphi + \psi = 1$ *sur* S
(ii) $\varphi \equiv 1$ *sur un voisinage de* E : V
(iii) $\psi \equiv 1$ *sur un voisinage de* F : W.

En effet (lemme 2.2) E et F sont deux compacts disjoints de S. Il suffit alors d'utiliser une partition de l'unité associée à deux ouverts, voisinages de E et F respectivement et d'union S.

Dans toute la suite φ et ψ sont ainsi fixées.

Avant d'attaquer directement la démonstration du théorème on établit une proposition dérivant de la proposition 3.3 et du corollaire 4.1.

Proposition 4.2. *Il existe trois fonctions θ, a, b dans $C^\omega(S\backslash F)$ et une constante $C > 0$ telles que :*

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \left[L, \bar{L}\right] = \theta T + aL + b\bar{L} \quad \textit{dans} \quad S\backslash F \\ \mid \partial^\alpha \theta \mid + \mid \partial^\alpha a \mid + \mid \partial^\alpha b \mid \leq C^{|\alpha+1|}\alpha \,! \quad \textit{sur} \quad \mathrm{Supp}(\varphi),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^3. \end{cases}$$

Démonstration. Elle est immédiate car $\left[L, \bar{L}\right]$ est un champ tangent à S et $(T, L, \bar{L})$ est un système libre sur $S\backslash F$. L'inégalité provient du fait que $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un compact de l'ouvert $S\backslash F$ sur lequel les trois fonctions θ, a, b sont de classe C^ω. Dorénavant nous noterons $R_1 = L$, $R_2 = \bar{L}$, $R_3 = T$ et $R_I = R_{i_1} \cdots R_{i_p}$ si $I = (i_p, \cdots, i_p)$, $i \ \in \{1, 2, 3\}$.

Maintenant nous remarquons que notre théorème principal découle du théorème suivant, où u est la solution canonique de $\bar{\partial}_b u = f$, avec $f \in C^\omega(S)$.

Theoreme 4.3. *Il existe une constante* $K > 0$ *telle que*

$$\|R_I u\| \leq K^{|I|+1} \mid I \mid ! \ \forall I. \tag{4.2}$$

En effet, une telle inégalité entraîne l'analyticité de u sur $S\backslash F$, où L, $\bar{L}$, T sont indépendants. Mais, au voisinage de F, S est strictement pseudoconvexe et donc u y est de classe C^ω (résultat local découlant dans le cas de $\mathbb{C}^2$ des travaux [23], [24] ; voir aussi [9] dans un cas dégénéré).

Le but de la suite est de montrer (4.2), avec K convenable. On a déjà le

Proposition 4.4. *Il existe* $K_1 > 0$ *t. q.*

$$\| \psi R_I u \| \leq K_1^{|I|+1} \mid I \mid ! \quad \forall I. \tag{4.3}$$

En effet, d'après le corollaire 4.1, ψ est à support compact dans l'ouvert $S\backslash E$. Donc

$$\| \psi \, R_I u \| \leq \| \, R_I u \, \|_{\mathrm{Supp}(\psi)} \leq K_1^{|I|+1} \mid I \mid !$$

avec K_1 convenable, puisque $u \in C^\omega(S\backslash E)$.

Par suite, il nous suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$\begin{cases} \| \varphi R_I u \| \leq K_2^{|I|+1} \mid I \mid ! \quad \forall I \\ K_2 \quad \text{constante convenable.} \end{cases} \tag{4.4}$$

On va faire donc la démonstration par récurrence sur $\mid I \mid = k$. On suppose que (4.4) est montré pour $\mid I \mid \leq k$, prenons $\mid I \mid = k+1$.

Premier cas : $2 \in I$. Alors R_I peut s'écrire : $R_I = R_{I'} \bar{L} R_{I''}$, avec $2 \notin R_{I''}$ (on peut avoir $I'' = \emptyset$). On a alors (avec $\bar{\partial}_b u = f$ et $f \in C^\omega(S)$)

$$\| \varphi R_I u \| \leq \| \varphi \, R_{I'} [\bar{L}, R_{I''}] u \| + \| \varphi \, R_{I'} R_{I''} f \| \, . \tag{4.5}$$

Utilisons alors le lemme suivant.

Lemme 4.5. *Il existe* $A > 0$ (*ne dépendant que des* R_j *et de* φ) *t. q.*

$$\begin{cases} [R_j, R_J] = \displaystyle\sum_{|K| \leq |J|} \lambda_K^{j,J} R_K \qquad \lambda_K^{j,J} \in C^\omega(S\backslash F) \\ \left| R_L(\lambda_K^{j,J}) \right| \leq A^{|J-K+L|+1} \mid J + L - K \mid ! \quad \textit{sur} \quad \mathrm{Supp}(\varphi). \end{cases} \tag{4.6}$$

Démonstration. Ce genre de lemme est standard. Il se démontre par récurrence sur $\mid J \mid$. Il suffit d'écrire $R_J = R_k R_{J'}$, $[R_j, R_J] = [R_j, R_k] \, R_{J'} + R_k \, [R_j, R_{J'}]$ d'utiliser que $[R_j, R_k] = \sum_{\ell=1}^{3} a_{jk\ell} R_\ell$, $a_{jk\ell} \in C^\omega(S\backslash F)$ et que $\mathrm{Supp}(\varphi)$ est un compact de $S\backslash F$, et d'effectuer les manipulations habituelles sur les factorielles.

Revenons maintenant à la démonstration de (4.4) dans le premier cas ($2 \in I$).

Le deuxièmpe terme dans (4.5) à droite se majore convenablement du fait que $f \in C^\omega(S)$.

Pour majorer le premier terme de droite, nous avons besoin du lemme suivant où $I \leq J$ signifie $i_\ell \in J$, $\forall i_\ell \in I$.

Lemme 4.6. *Il existe* $B>0$ (*ne dépendant que des* R_j *et de* φ) *tel que, si* $g,h\in C^\infty(S\backslash F)$

$$R_I(gh)=\sum_{I'+I''\leq I} R_{I'}(g)R_{I''}(h), \tag{4.7}$$

Démonstration. Là aussi on utilise une récurrence. Considérons $R_jR_I(gh)$ avec $\mid I\mid = k$.

$$R_jR_I(gh)=\sum_{I'+I''\leq I} R_jR_{I'}(g)R_{I''}(h)+R_{I'}(g)R_jR_{I''}(h)$$

ce qui s'écrit bien sous la forme (4.7).

Revenons alors au premier cas (ici $\bar L=R_2$)

$$\varphi R_{I'}\left[\bar L,R_{I''}\right]=\varphi\sum_{J'+K'\leq I',\ K''\leq I''} R_{J'}(\lambda_{K''}^{2,I''})R_{K'}R_{K''}.u$$

On tire donc :

$$\left\|\varphi R_{I'}[\bar L,R_{I''}]u\right\|\leq\sum_{J'+K'\leq I',\ K''\leq I''}\sup_{\mathrm{Supp}(\varphi)}\left|R_{J'}(\lambda_{K''}^{I''})\right|\left\|\varphi R_{K'}R_{K''}u\right\|$$

et donc

$$\left\|\varphi R_{I'}\left[\bar L,R_{I''}\right]u\right\|\leq\sum_{J'+K'\leq I',\ K''\leq I''} A^{|I''-K''+J'|+1}$$
$$\times(\mid I''+J'-K''\mid)!\times K_2^{|K'+K''|+1}\mid K'+K''\mid!$$

d'après les deux lemmes précédents et le fait que $\mid K'+K''\mid\leq k$.

Soit encore,

$$\left\|\varphi R_{I'}[\bar L,R_{I''}]u\right\|\leq\sum_{J'+K'\leq I',\ K''\leq I''} A^{|I'+I''-K'-K''|+1}K_2^{|K'+K''+1|}(I'+I''+1)!.$$

Soit encore

$$\left\|\varphi R_{I'}[\bar L,R_{I''}]u\right\|\leq K_2^{|I'+I''|+2}(I'+I''+1)!\left\{\sum\left(\frac{A}{K_2}\right)^{|I'+I''-K'-K''|+1}\right\}.$$

Si $K_2\geq 200A$, la quantité en accolade est majorée par $\frac{1}{100}$ ce qui entraîne l'estimation (4.4) si $2\in I$, avec le facteur $\frac{1}{100}$ (voir le troisième cas, où on a besoin d'un tel facteur).

Deuxième cas : $2\notin I$ et $1\notin I$.

Evidemment si $1 \notin I$ alors $R_I = T^n$ et ce cas est très simple d'après la proposition 3.2

$$\|T^n u\| \leq C \left\|\bar{L} T^n u\right\| \leq C \left\|[\bar{L}, T^n] u\right\| + \|T^n f\| .$$

Or

$$\left[\bar{L}, T^n\right] = \sum_{j \leq n-1} c_{n,j} T^j \bar{L};\ c_{n,j} \text{ constantes t. q. } \mid c_{n,j} \mid \leq \frac{n!}{j!} \tag{4.8}$$

(c'est élémentaire !).

De nouveau, en prenant K_2 assez grand, on majore un tel terme comme au cas 1.

Troisième cas : $2 \notin I$, $1 \in I$.

Ainsi on considère R_I s'écrivant

$$\begin{cases} R_I = R_{I'} L R_{I''} \quad \text{avec} \quad I' + I'' < I \\ \varphi R_I u = \varphi [R_{I'}, L] R_{I''} u + \varphi L R_{I'} R_{I''} u. \end{cases} \tag{4.9}$$

Le terme $\varphi \left[R_{I'}, L\right] R_{I''} u$ se majore aisément par la procédure précédente, en utilisant le lemme (4.5) et la démonstration du premier cas.

Il nous reste le deuxième terme de droite dans (4.9). Pour cela nous utilisons la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\|L\varphi g\|^2 \leq 2 \left\|\bar{L}\varphi g\right\|^2 + |(\theta T \varphi g, \varphi g)| + C_0 \|\varphi g\|^2, \quad \forall g \in C^\infty(S). \tag{4.10}$$

Démonstration. C'est une démonstration standard par intégration par parties

$$\|L\varphi g\|^2 \leq \left\|\bar{L}\varphi g\right\|^2 + \left|([L, \bar{L}]\varphi g, \varphi g)\right| + 0\left(\|\varphi g\|^2 + \|\varphi g\| \left\|\bar{L}\varphi g\right\|\right).$$

Or sur $S \backslash F$ on a (4.1) (Prop. 42) et les termes $(aL\varphi g, \varphi g)$ et $\left(b\bar{L}\varphi g, \varphi g\right)$ se majorent par $O\left(\|\varphi g\|^2 + \|\varphi g\| \left\|\bar{L}\varphi g\right\|\right)$. Ce qui entraîne aisément (4.10).

Si on applique maintenant l'inégalité (4.10) au deuxième terme de droite dans (4.9) on obtient

$$\begin{cases} \|\varphi L R_{I'} R_{I''} u\|^2 \leq 2\left(\|L(\varphi) R_{I'} R_{I''} u\|^2 + \|L\varphi R_{I'} R_{I''} u\|^2\right) \\ \leq 2(\sup \mid L(\varphi) \mid)^2 \|R_{I'} R_{I''} u\|^2_{C\{\varphi=1\}} + 4\left\|\bar{L}\varphi R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 + \\ 2\left|(\theta T \varphi R_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u)\right| + 2C_0 \|\varphi R_{I'} R_{I''} u\|^2 . \end{cases} \tag{4.11}$$

Il y a quatre termes à droite dans (4.11). Nous allons donc montrer que si K_2 est assez grand, la majoration (4.4) est valable (avec de nouveau un facteur $\frac{1}{100}$).

Le premier terme est majoré par $\left(\frac{1}{200}K_2^{|I|+1} \mid I \mid !\right)^2$ car le compact $\overline{C\{\varphi = 1\}}$ est dans l'ouvert où u est analytique réelle.

Le deuxième terme se traite de la même façon en remarquant que :

$$\left\|\bar{L}\varphi R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 \leq 2\left(\left\|\bar{L}(\varphi) R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 + \left\|\varphi \bar{L} R_{I'} R_{I''} u\right\|^2\right). \tag{4.12}$$

Le deuxième terme du second membre de (4.12) se majore alors, en utilisant le premier cas par

$$\left\|\varphi \bar{L} R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 \leq \frac{1}{100}\left(K_2^{|I'+I''|+2}\right)^2 ((I'+I''+1)!)^2.$$

Ainsi dans (4.12), on sort

$$\left\|\bar{L}\varphi R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 \leq \frac{1}{50}\left(K_2^{|I'+I''|+2}\right)^2 ((\mid I'+I'' \mid +1!)^2 \left(= \frac{1}{50}(K_2^{|I|+1} \mid I \mid !)^2\right)$$
$$+ 2\left\|\bar{L}(\varphi) R_{I'} R_{I''} u\right\|^2.$$

Ce dernier terme se majore par

$$\left(\sup \mid \bar{L}(\varphi) \mid\right)^2 \left\|R_{I'} R_{I''} u\right\|^2_{C\{\varphi=1\}}$$

et donc par

$$\frac{1}{(50)^2}\left(K_2^{|I|+1} \mid I \mid !\right)^2$$

si K_2 assez grand.

Le quatrième terme se majore, lui, très aisément. Il nous reste le troisième terme. Mais on a

$$\left\{\begin{aligned} &|(\theta T\varphi R_{I'} R_{i''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u)| \leq |(\theta T(\varphi) R_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u)| \\ &\qquad\qquad + |(\theta\varphi T R_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u)|. \end{aligned}\right. \tag{4.13}$$

Le seul terme fondamentalement nouveau à majorer est le deuxième terme à droite dans (4.13)

$$|(\theta\varphi T R_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u)| \leq \left\|\theta\varphi T R_{I'} R_{I''} u\right\|^2 + \left\|\varphi R_{I'} R_{I''} u\right\|^2.$$

En fait si $TR_{I'}R_{I''} = R_J$ avec $2 \in J$, et comme $R_{I'}R_{I''}$ est d'ordre k on est ramené au premier cas. Il en est de même si $R_{I'}R_{I''} = T_{I'+I''}$ 'c'est-à-dire au deuxième cas). Donc on peut supposer que $1 \in (I', I'')$. Pour bien faire voir comment on s'y prend, soit $R_{I'} = L\tilde{R}_{I'}$. Alors

$$\left(\theta\varphi T L\tilde{R}_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u\right) = \left([\theta\varphi T, L]\tilde{R}_{I'} R_{I''} u, \varphi R_{I'} R_{I''} u\right) +$$
$$\left(\theta\varphi T\tilde{R}_{I'} R_{I''} u, \bar{L}(\varphi) R_{I'} R_{I''} u\right) + \left(\theta\varphi T\tilde{R}_{I'} R_{I''} u, \varphi\bar{L} R_{I'} R_{I''} u\right).$$

Ce qui nous ramène aux différents cas considérés précédemment, car $\bar{L}R_{I'}R_{I''}$ relève du premier cas et $T\tilde{R}_{I'}R_{I''}$ est de longueur strictement plus petite que celle de I, car $R_{I'} = L\tilde{R}_{I'}$ et $\mid I \mid = \mid I' \mid + \mid I'' \mid +1$.

Finalement, on a rencontré un nombre borné (disons par 20) de termes tous majorés par $\frac{1}{20}K_2^{|I|+1} \mid I \mid !$ ce qui entraîne le résultat.

References

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Analyticity for degenerate elliptic equations and applications*, Proc. Symp. in Pure Math. **23** (1971), 79–84.

[2] S. C. Chen, *Global analytic hypoellipticity of the $\bar\partial$–Neumann problem*, Invent. Math. **92** (1988), 175–185.

[3] M. Christ, *Analytic hypoellipticity, representations of nilpotent groups and a non linear eigenvalue problem*, Duke Math. J. **72** (1993), 595–639.

[4] ———, *The Szegö projection need not preserve global analyticity*, A paraître..

[5] ———, *Global analytic regularity in the presence of symmetry*, Math. Res. Lett **1** (1994), 559–563.

[6] N. Hanges and A. Himonas, *Singular solutions of sums of squares of vector fields.*, Comm. Partial Diff. Eq. **16** (1991), 1503–1511..

[7] M. Christ and D. Geller, *Counter–examples to analytic hypoellipticity for domains of finite type*, Ann. of Math. **235** (1992), 551–566.

[8] M. Derridj, *Régularité pour $\bar\partial$ dans quelques domaines pseudoconvexes*, J. Diff. Geom. **14** (1979), 59–66.

[9] M. Derridj and D. Tartakoff, *On the global real–analyticity for the $\bar\partial$–Neumann problem*, Comm. Partial Diff. Eq. **5** (1976), 401–435.

[10] ———, *Global analyticity for $\square_b$ on three dimensional pseudoconvex C.R. manifolds*, Comm. Partial Diff. Eq. **18** (1993), 1847–1868.

[11] ———, *Microlocal analyticity for the canonical solution to $\bar\partial_b$ on some rigid weakly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$*, Comm. Partial Diff. Eq. **20** (1995), 1647–1667.

[12] M. Derridj and C. Zuily, *Régularité analytique et Gevrey pour des opérateurs elliptiques, paraboliques, dégénérés du second ordre.*, Astérisque **2** (1973), 371–381.

[13] A. Grigis and J. Sjöstrand, *Front d'onde analytique et somme de carrés de champs de vecteurs*, Duke Math. J. **52** (1985), 35–51.

[14] B. Helffer, *Conditions nécessaires d'hypoanalyticité pour des opérateurs invariants à gauche homogènes sur un groupe nilpotent gradué*, J. Diff. Eq. **44** (1982), 460–481.

[15] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[16] J. J. Kohn, *Estimates for $\bar\partial_b$ on pseudoconvex CR manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. **43** (1985), 207–217.

[17] ———, *The range of the tangential Cauchy–Riemann operator*, Duke Math. J. **53** (1986), 525–545.

[18] G. Komatsu, *Global analytic hypoellipticity of the $\bar\partial$-Neumann problem*, Tohoku Math. J. **28** (1976), 145–156.

[19] G. Metivier, *Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques*, Indiana Math. J. **29** (1980), 823–860.

[20] ———, *Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics*, Comm. Partial Diff. Eq. **6** (1981), 1–90.

[21] I. Reizner, *Analyticité globale pour $\bar\partial_b$ sur certaines hypersurfaces compactes de $\mathbb{C}^n$. A paraître.*

[22] J. Sjöstrand, *Analytic wave front sets and operators with multiple characteristics*, Hokkaïdo Math. J. **12** (1983), 392–433.

[23] D. Tartakoff, *On the global real analyticity of solutions to $\square_b$ on compact manifolds*, Comm. Partial Diff. Eq. **1** (1976), 283–311.

[24] ———, *Local analytic hypoellipticity for $\square_b$ on non–degenerate Cauchy–Riemann manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75** (1978), 3027–3028.

[25] ———, *Local real analyticity of solutions to $\square_b$ and $\bar\partial$–Neumann problem*, Acta Math. **145** (1980), 117–204.

[26] J. M. Trepreau, *Sur l'hypoellipticité analytique microlocale des opérateurs de type principal*, Comm. Partial Diff. Eq. **9** (1984), 1119–1146.

[27] F. Treves, *Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and application to the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Comm. Partial Diff. Eq. **3** (1978), 475–642.

[28] M. Derridj and D. Tartakoff, *Microlocal analyticity for the canonical solution to $\bar{\partial}_b$ on strictly pseudoconvex CR manifolds of real dimension three*, Comm. Partial Diff. Eq. **20** (1995)), 1871–1926.

Université de Paris–Sud, Mathématiques (425), 91405 Orsay (France) et Université de Rouen, Mathématiques, 76134 Mont St Aignan (France)

E-mail address: Makhlouf.DERRIDJ@math.u-psud.fr