COMMUNICATIONS IN
ANALYSIS AND GEOMETRY
Volume 6, Number 1, 173-197, 1998

Les équations de Seiberg-Witten sur une surface complexe non Kählérienne

OLIVIER BIQUARD

We consider the Seiberg-Witten invariants of non Kähler complex surfaces with $b_2^+ > 0$. They are all elliptic surfaces of nonnegative Kodaira dimension. We prove that they are simple type and we calculate the basic classes and the multiplicities. We deduce that non Kähler properly elliptic surfaces do not carry a symplectic structure.

Introduction.

Les équations récemment introduites par Seiberg et Witten (voir [22, 15]) se sont avérées des outils importants pour l'étude de la topologie des variétés de dimension quatre, et particulièrement des surfaces kählériennes, ou, plus généralement, des variétés symplectiques de dimension 4.

Dans cet article, nous envisageons un cas a priori en dehors de la catégorie symplectique, à savoir le cas des surfaces complexes non kählériennes : une surface complexe est kählérienne si et seulement si b_1 est pair, ou, ce qui est équivalent, b_2^+ est impair (voir la classification dans [1]). Les invariants sont bien définis pour $b_2^+ > 0$, si bien que les modèles minimaux de la classe des surfaces non kählériennes sont, d'une part, en dimension de Kodaira nulle, les surfaces de Kodaira, d'autre part, en dimension de Kodaira égale à un, les surfaces proprement elliptiques minimales à b_1 impair.

On verra que le cas que nous considérons est une déformation du cas kählérien, beaucoup plus simple que le cas symplectique [18]. Nous déformons l'opérateur de Dirac en l'opérateur $\bar\partial + \bar\partial^*$, puis, inspiré par Witten [22], nous perturbons les équations par une 2-forme du type $\varepsilon^{2,0}+\overline{\varepsilon^{2,0}}$, où

$\varepsilon^{2,0} \in H^0(K)$. Les solutions s'identifient alors à des décompositions de K, comme diviseur effectif, en $K = (K+L)/2 + (K-L)/2$. Malheureusement, la présence de composantes multiples dans K peut empêcher les équations d'être transverses. Pour y remédier, on perturbe K lui-même, ce qui rend les solutions toujours transverses et évident le calcul des invariants.

Dans les deux cas cités plus haut, nous montrons que ces surfaces sont de type simple et calculons leurs classes basiques et leurs multiplicités (théorèmes 5.1 et 8.1). Notre méthode donne simultanément le cas des surfaces elliptiques kählériennes, déjà traité par Brussee [4] et par Friedman et Morgan [8], et le cas des surfaces elliptiques non kählériennes. Cependant, la démonstration est différente, et plutôt plus simple, puisqu'elle permet d'éviter les calculs sur des espaces de modules non génériques.

Les conséquences de ces résultats sur l'invariance par difféomorphisme des divers invariants d'une surface elliptique sont moins intéressantes que dans le cas kählérien, puisqu'elles peuvent s'obtenir par des considérations élémentaires (voir [6] et les remarques à la fin de [7]). En revanche, nous notons, comme corollaire standard, que ces surfaces n'admettent pas de métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive quand les invariants sont non triviaux. Surtout, nous déduisons des théorèmes de structure de Taubes sur les invariants de Seiberg-Witten des variétés symplectiques le résultat suivant (théorème 8.2 dans le texte).

Théorème 0.1. *Les surfaces proprement elliptiques à b_1 impair (c'est-à-dire non kählériennes) n'admettent pas de structure symplectique.*

Une autre manière d'énoncer le théorème consiste à dire qu'une surface complexe à dimension de Kodaira strictement positive qui admet une forme symplectique doit être kählérienne.

Incidemment, ces variétés non symplectiques avec invariants de Seiberg-Witten non triviaux s'ajoutent aux exemples de [14]. D'autre part, les surfaces de Kodaira sont exclues du théorème : en réalité, elles possèdent une structure symplectique, appelée structure symplectique de Kodaira-Thurston [13, 21].

Remerciements. Je remercie vivement Paul Gauduchon, qui a montré beaucoup d'intérêt pour ce travail et a mis à ma disposition la référence [11], ainsi que Dieter Kotschick qui m'a signalé l'existence de la structure symplectique de Kodaira-Thurston. Je remercie aussi le referee dont les remarques précises ont permis d'améliorer la présentation de cet article.

1. Équations de Seiberg-Witten sur une surface complexe.

Soit S une surface complexe, munie d'une métrique hermitienne donnée par une forme de Kähler ω. La forme de Lee θ est définie par $d\omega = \theta \wedge \omega$, ou, de manière équivalente, $\theta = C * d\omega = -C\, d^*\omega$, où $C = \sum i^{a-b} P_{a,b}$ est l'opérateur de Weil. On calcule $*\partial\bar\partial\omega = i\bar\partial^*\theta^{0,1} = i\partial^*\theta^{1,0}$. Quitte à changer la métrique par un facteur conforme [10], on peut supposer que ω est une métrique de Gauduchon, c'est-à-dire satisfait $\partial\bar\partial\omega = 0$. Dans ce cas, le degré d'un fibré holomorphe en droites $\mathcal{L}$, défini par $\deg_\omega \mathcal{L} = \int_S iF_A \wedge \omega$, où A est la connexion de Chern d'une métrique hermitienne h sur $\mathcal{L}$, est indépendant de h (nous avons supprimé le facteur 2π habituel qui ne nous sert à rien).

Convention. Dans le texte, les symboles $|\cdot|$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigneront la norme et le produit scalaire ponctuels, et $\|\cdot\|$ et $(\cdot,\cdot)$ la version intégrée.

Il y a une structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ canonique sur S, induite par le fibré anti-canonique $L = K^{-1}$; pour une structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ générale, on a $L = K^{-1} \otimes M^2$, et le fibré des spineurs est $W = \Lambda^{0,*}(M) = W^+ \oplus W^-$, avec $W^+ = \Lambda^{0,0}(M) \oplus \Lambda^{0,2}(M)$ et $W^- = \Lambda^{0,1}(M)$. La structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ est déterminée par le fibré M, si bien que l'invariant de Seiberg-Witten, après avoir fixé la structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ de référence, apparaît comme une fonction sur $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Nous utilisons les conventions de [2, pages 135 et suivantes], de sorte que l'action de Clifford de la forme ω a pour valeur propre $(2b-2)i$ sur $\Lambda^{0,b}$. Dans ces conditions, l'opérateur de Dirac, associé à une connexion A sur L, s'écrit [11], si $sgn\psi = \pm 1$ suivant que $\psi \in W^\pm$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D_A\psi = (\bar\partial_A + \bar\partial_A^*)\psi - \frac{sgn\psi}{4}\theta\cdot\psi, \tag{1.1}$$

où l'opérateur $\bar\partial_A$ sur $M = (L\otimes K)^{1/2}$ est induit par la connexion A sur L et la structure holomorphe de K. Nous regardons la perturbation suivante des équations de Seiberg-Witten [15]. Elle porte sur une connexion unitaire A sur L et un champ de spineurs positifs ψ, les paramètres $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \Omega^2_+$ étant donnés ; on notera $\sigma(\psi) \in \Omega^2_+$ la 2-forme autoduale correspondant à l'endomorphisme $i(\psi^*\otimes\psi)^0$ de W^+ via la multiplication de Clifford :

$$\begin{cases} D_A\psi = -\frac{t}{2\sqrt{2}}\theta\cdot\psi, \\ iF_A^+ = \sigma(\psi) + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

Techniquement, il est nécessaire de considérer des solutions (et des transformations de jauge) dans certains espaces de Banach, par exemple des espaces de Hölder, mais nous passerons ce fait sous silence.

Lemme 1.1. *L'espace des modules des solutions de* (1.2)*, à t et ε fixés, est compact, de dimension virtuelle $(L^2 - K^2)/4$. Si $b_2^+ > 0$, l'invariant de Seiberg-Witten, calculé à partir de l'espace des modules de* (1.2) *pour une perturbation générique ε, est le même pour $t = 0$ et $t = 1$.*

Preuve. Si $D_A\psi = X\cdot\psi$ pour un champ de vecteurs X sur S, alors on calcule

$$D_A^2\psi = -2\nabla_X\psi + \text{termes d'ordre 0 en } \psi,$$

donc, pour une solution des équations (1.2), par la formule de Lichnerowicz,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\psi|^2 &= \langle\nabla^*\nabla\psi, \psi\rangle - |\nabla\psi|^2\\ &= \langle D_A^2\psi - \frac{1}{2}F_A\cdot\psi - \frac{s}{4}\psi, \psi\rangle - |\nabla\psi|^2\\ &\le -\frac{1}{4}|\psi|^4 - 2\Re\langle\nabla_X\psi, \psi\rangle - |\nabla\psi|^2 + c|\psi|^2\,;\end{aligned}$$

au maximum de $|\psi|^2$, s'il est non nul, on a $\Re\langle\nabla_X\psi, \psi\rangle = 0$, donc on obtient $|\psi|^2 \le 4c$, puis on conclut comme dans [15]. La dimension virtuelle est bien sûr la même que pour l'équation de départ, puisqu'on l'a perturbée par des termes d'ordre 0 qui ne modifient pas l'indice de la linéarisation (voir son calcul dans [15]). Enfin, l'absence de solution réductible ($\psi = 0$) est équivalente à $c_1(L)^+ = \varepsilon^{\mathrm{harm}}/2\pi$, condition indépendante de t qui peut être satisfaite par une perturbation générique dès que $b_2^+ > 0$. La seconde assertion est alors un fait standard. □

Remarque 1. Si X est complexe (ce qui correspond à une perturbation de l'opérateur de Dirac par un terme d'ordre zéro arbitraire), le raisonnement reste valable en utilisant l'inégalité $-2\Re\langle\nabla_X\psi, \psi\rangle - |\nabla\psi|^2 \le c\,|\psi|^2$.

Le lemme précédent signifie que pour calculer l'invariant de Seiberg-Witten, on peut se contenter de regarder le système

$$\begin{cases} (\bar\partial_A + \bar\partial_A^*)\psi = 0, \\ iF_A^+ = \sigma(\psi) + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.3}$$

2. Une perturbation des équations.

Le lemme ci-dessous indique que certaines perturbations ε, déjà considérées par Witten [22, équation (4.11)], permettent de découpler les équations. Ces perturbations sont nécessaires pour éviter les solutions réductibles, qui existent toujours ici car le degré n'est plus un invariant topologique (alors que dans le cas kählérien, il suffit que le degré de L soit non nul pour éviter les solutions réductibles aux équations non perturbées). D'autre part, rappelons [1, chapitre IV,2] que même pour une surface non kählérienne, on a la décomposition $H^2(S,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=2} H^{p,q}(S)$ (c'est en revanche faux pour le H^1).

Lemme 2.1. *Supposons L de type (1,1) et $\bar\partial^*\varepsilon^{0,2} = 0$. Posons $\psi = (\alpha,\gamma) \in \Lambda^{0,0}(M) \oplus \Lambda^{0,2}(M)$. Alors le système* (1.3) *est équivalent à*

$$F_A^{0,2} = \frac{\overline{\alpha}\gamma}{2} - i\varepsilon^{0,2} = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\bar\partial_A \alpha = 0\,, \qquad \bar\partial_A^* \gamma = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\Lambda F_A - \frac{i}{2}(|\alpha|^2 - |\gamma|^2) = 0\,. \tag{2.3}$$

L'équation (2.1) *implique que L a une structure holomorphe $\mathcal{L}$, et les équations* (2.2) *impliquent que $\alpha \in H^0((\mathcal{L}\otimes K)^{1/2})$ et $\gamma \in H^2((\mathcal{L}\otimes K)^{1/2}) = H^0((\mathcal{L}^{-1}\otimes K)^{1/2})^*$.*

Preuve. On calcule la formule

$$-i\sigma(\psi)=\frac{i\omega}{4}(|\alpha|^2-|\gamma|^2)+\frac{\overline{\alpha}\gamma-\alpha\overline{\gamma}}{2}.$$

On a donc $F_A^{0,2}=\frac{\overline{\alpha}\gamma}{2}-i\varepsilon^{0,2}$. Comme $F_A^{0,2}$ est trivial dans $H^{0,2}$, on déduit que $i\varepsilon^{0,2}$ est la partie $\bar\partial$-harmonique de $\frac{\overline{\alpha}\gamma}{2}$. Notons $(\overline{\alpha}\gamma)^h$ la partie $\bar\partial$-harmonique de $\overline{\alpha}\gamma$. De $\bar\partial_A\alpha+\bar\partial_A^*\gamma=0$, on déduit $\bar\partial_A^2\alpha+\bar\partial_A\bar\partial_A^*\gamma=0$ et donc (en faisant attention au fait que l'on passe de L à M par une racine carrée, donc $\bar\partial_A^2=\frac{1}{2}F_A^{0,2}$)

$$\left(\frac{\overline{\alpha}\gamma-(\overline{\alpha}\gamma)^h}{4}\right)\alpha+\bar\partial_A\bar\partial_A^*\gamma=0.$$

Faisons le produit scalaire avec γ et intégrons :

$$\frac{1}{4}\left(\overline{\alpha}\gamma-(\overline{\alpha}\gamma)^h,\overline{\alpha}\gamma\right)+\|\bar\partial_A^*\gamma\|^2=\frac{1}{4}\left\|\overline{\alpha}\gamma-(\overline{\alpha}\gamma)^h\right\|^2+\|\bar\partial_A^*\gamma\|^2=0.$$

On déduit $F_A^{0,2}=0$, $\bar\partial_A^*\gamma=0$, $\bar\partial_A\alpha=0$ et le reste du lemme. $\square$

Remarque 2. Quand L n'est pas de type (1,1), le raisonnement ci-dessus reste valable pour $\varepsilon=0$. Une solution des équations fournirait alors une structure holomorphe sur L, ce qui est impossible. L'absence de solutions pour l'équation non perturbée implique que l'invariant de Seiberg-Witten de L est nul. On pourra donc se restreindre, dans la suite, à L de type (1,1).

3. Résolution des équations vortex.

Nous passons à présent à l'étude de l'équation (2.3). C'est une équation de type vortex (voir [3, 9]), dont l'étude est ici à peu près immédiate, même dans le cas non kählérien.

Lemme 3.1. *Soit S une surface complexe munie d'une métrique de Gauduchon. Soient un fibré holomorphe hermitien $\mathcal{M}$, des sections $\alpha\in H^0(\mathcal{M})$*

et $\gamma \in H^2(\mathcal{M}) = H^0(\mathcal{M}^{-1} \otimes K)^*$*, chacune non nulle, et* A_0 *la connexion de Chern sur* $\mathcal{L} = \mathcal{M}^2 \otimes K^{-1}$*. Alors il existe une unique fonction* $u : S \to \mathbb{R}$*, telle que* $(A = A_0 + 2id^C u, e^u\alpha, e^{-u}\gamma)$ *soit solution de* (2.3).

Preuve. Rappelons que $d^C = i(\bar{\partial} - \partial)$. Nous voulons résoudre l'équation

$$\Lambda F_{A_0} + 2i\Lambda dd^C u = \frac{i}{2}(e^{2u}|\alpha|^2 - e^{-2u}|\gamma|^2).$$

On sait [10] que $P = -\Lambda dd^C = \Delta - \langle\theta, d\cdot\rangle$ est à valeurs dans les fonctions d'intégrale nulle, puisque $d^*\theta = 0$. Donc une condition nécessaire est l'appartenance de u à l'espace

$$V = \{u, \int_S e^{2u}|\alpha|^2 - e^{-2u}|\gamma|^2 = -2\deg_\omega \mathcal{L}\}.$$

Nous résolvons le problème par une méthode de continuité, en regardant, pour $t \in [0,1]$, le problème

$$Q(u,t) = i\Lambda F_{A_0} - 2\Lambda dd^C u + \frac{t}{2}(e^{2u}|\alpha|^2 - e^{-2u}|\gamma|^2) - \frac{1-t}{volS}\deg_\omega \mathcal{L} = 0,$$

où Q est vu comme un opérateur de $V \times [0,1]$ dans $W = \{f, \int_S f = 0\}$. Notons I l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que l'équation $Q(u,t) = 0$ ait une solution.

Nous noterons $V_{k+\eta}$, $W_{k+\eta}$ les éléments de V et W de régularité höldérienne $k + \eta$.

Comme P est un isomorphisme $W_{2+\eta} \to W_\eta$, l'équation $Q(u,0) = 0$ a une unique solution dans $V_{2+\eta}$, puisque ni α ni γ n'est nul. Ainsi $0 \in I$.

Supposons que pour un t donné, on ait une solution $u_t \in V$ à l'équation $Q(u_t,t) = 0$. Alors la linéarisation de Q par rapport à u en ce point n'est autre que

$$\partial_u Q(\dot{u}) = 2P\dot{u} + t\dot{u}(e^{2u_t}|\alpha|^2 + e^{-2u_t}|\gamma|^2).$$

On a $2(\langle\theta, d\dot{u}\rangle, \dot{u}) = (\theta, d\dot{u}^2) = 0$ puisque $d^*\theta = 0$; comme $P = \Delta - \langle\theta, d\cdot\rangle$, si $\partial_u Q(\dot{u}) = 0$, alors en intégrant contre $\dot{u}$, on obtient $\dot{u} = 0$. On déduit immédiatement que $\partial_u Q$ est un isomorphisme $T_{u_t}V_{2+\eta} \to W_\eta$, donc I est ouvert, et en particulier I contient un voisinage de 0.

La démonstration du lemme 1.1 implique que si $Q(u,t) = 0$, avec $0 < \epsilon \leq t \leq 1$, alors $|e^u\alpha|^2 + |e^{-u}\gamma|^2$ reste borné par une constante. On déduit facilement que I est fermé.

Ce qui précède implique que $I = [0,1]$, donc en particulier l'équation $Q(u,1) = 0$ a une solution. On a donc résolu l'équation souhaitée.

Enfin, pour démontrer l'unicité, prenons deux solutions, que l'on peut supposer être 0 et u, donc u vérifie

$$2Pu + \frac{1}{2}\left((e^{2u}-1)|\alpha|^2 - (e^{-2u}-1)|\gamma|^2\right) = 0\,;$$

en intégrant contre u, on obtient

$$2\|du\|^2 = -\int \frac{u}{2}\left((e^{2u}-1)|\alpha|^2 - (e^{-2u}-1)|\gamma|^2\right)\,;$$

le second membre étant toujours négatif, on déduit $u = 0$. □

Remarque 3. Le fibré canonique K ne joue aucun rôle particulier dans ce lemme. Le lemme reste vrai en remplaçant K par n'importe quel fibré holomorphe hermitien fixé.

Corollaire 3.2. *L'espace des modules des solutions des équations* (2.1) *à* (2.3) *s'identifie à l'espace des solutions (modulo conjugaison complexe) des triplets* $(\mathcal{L}, \alpha, \gamma)$*, où* $\mathcal{L}$ *est une structure holomorphe sur* L*,* $\alpha \in H^0((\mathcal{L}\otimes K)^{1/2})$*,* $\gamma \in H^2(\mathcal{L}\otimes K)^{1/2}) = H^0((\mathcal{L}^{-1}\otimes K)^{1/2})^*$ *et* $\overline{\alpha}\gamma = 2i\varepsilon^{0,2}$.

Remarque 4. La perturbation ε du lemme 2.1 est simplement obtenue en prenant une section holomorphe $\varepsilon^{2,0} \in H^0(K)$, ce qui correspond à représenter K comme un diviseur effectif. Alors, l'espace des modules ci-dessus s'identifie aux décompositions, comme diviseur effectif, de K comme $K = (K + \mathcal{L})/2 + (K - \mathcal{L})/2$.

4. Le $\mathbf{H}^1$ du complexe elliptique et la transversalité.

Considérons la structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ donnée par $L = K^{-1} \otimes M^2$. Soit une solution (A, α, γ) aux équations du lemme 2.1. On décompose $\Omega^2_+ = \mathbb{R} \oplus \Omega^{0,2}$, où la projection sur le facteur $\mathbb{R}$ est l'opérateur Λ. On a alors le complexe elliptique de déformation régissant les équations, donné par

(4.1)

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathbb{R}} \xrightarrow{d_0} \Omega^{0,1} \times \Omega^{0,0}(M) \times \Omega^{0,2}(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^0_{\mathbb{R}} \times \Omega^{0,2} \times \Omega^{0,1}(M) \longrightarrow 0 .$$

Pour une perturbation ε non nulle, la solution n'est pas réductible (donc $\mathbf{H}^0 = 0$) et l'indice du complexe est $(L^2 - K^2)/4 = \dim \mathbf{H}^1 - \dim \mathbf{H}^2$. La différentielle d_0 est donnée par l'action infinitésimale d'un élément iu du groupe de jauge (u à valeurs dans $\mathbb{R}$), par

$$d_0(u) = (\dot{a} = -2i\bar{\partial}u, \dot{\alpha} = iu\alpha, \dot{\gamma} = iu\gamma) ;$$

la différentielle d_1 est la linéarisation des équations (1.3) : si $d_1(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) = (f, \phi, \beta)$, alors

$$\begin{aligned} f &= \Re(2i\Lambda\partial\dot{a} + \langle\alpha, \dot{\alpha}\rangle - \langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle) , \\ \phi &= \bar{\partial}\dot{a} - \frac{\bar{\dot{\alpha}}\gamma + \overline{\alpha}\dot{\gamma}}{2} , \\ \beta &= \bar{\partial}_A\dot{\alpha} + \bar{\partial}^*_A\dot{\gamma} + \frac{\dot{a}\alpha + \iota(\bar{\dot{a}})\gamma}{2} . \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'adjoint de d_0 est donné par $d_0^*(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) = -\Im(-2\bar{\partial}^*\dot{a} + \langle\alpha, \dot{\alpha}\rangle + \langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle)$. Rassemblant cet adjoint avec la linéarisation (4.2), et tenant compte de $\bar{\partial}^* = -i\Lambda\partial - \langle\theta^{0,1}, \cdot\rangle$ sur les (0,1)-formes par [5], on voit que l'opérateur $d_0^* + d_1 : \Omega^{0,1} \times \Omega^0(M) \times \Omega^{0,2}(M) \to \Omega^0 \times \Omega^{0,2} \times \Omega^{0,1}(M)$ est donné par les formules

$$\begin{aligned} f &= -2\bar{\partial}^*\dot{a} + \langle\alpha, \dot{\alpha}\rangle - \overline{\langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle} - 2\Re\langle\theta^{0,1}, \dot{a}\rangle , \\ \phi &= \bar{\partial}\dot{a} - \frac{\bar{\dot{\alpha}}\gamma + \overline{\alpha}\dot{\gamma}}{2} , \\ \beta &= \bar{\partial}_A\dot{\alpha} + \bar{\partial}^*_A\dot{\gamma} + \frac{\dot{a}\alpha + \iota(\bar{\dot{a}})\gamma}{2} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le lemme qui suit est la traduction infinitésimale du lemme 2.1.

Lemme 4.1. *Le noyau de $d_0^* + d_1$, c'est-à-dire le $\mathbf{H}^1$ du complexe de déformation des équations, est donné par les triplets $(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$ tels que*

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\dot{a} &= 0\,,\\ \bar{\partial}_A\dot{\alpha} + \frac{\dot{a}\alpha}{2} &= 0\,,\\ \overline{\dot{a}}\gamma + \overline{\alpha}\dot{\gamma} &= 0\,,\\ \bar{\partial}_A^*\dot{\gamma} + \frac{\iota(\overline{\dot{a}})\gamma}{2} &= 0\,,\\ -2\bar{\partial}^*\dot{a} + \langle\alpha, \dot{\alpha}\rangle - \overline{\langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle} - 2\Re\langle\theta^{0,1}, \dot{a}\rangle &= 0\,.\end{aligned}$$

Preuve. Faisons le produit scalaire des deux morceaux de la troisième équation de (4.3) :

$$\begin{aligned}0 \geq 2(\bar{\partial}_A\dot{\alpha} + \frac{\dot{a}\alpha}{2}, \bar{\partial}_A^*\dot{\gamma} + \frac{\iota(\overline{\dot{a}})\gamma}{2}) &= (\bar{\partial}_A(\dot{a}\alpha), \dot{\gamma}) + (\dot{\alpha}, \bar{\partial}_A^*(\iota(\overline{\dot{a}})\gamma))\\ &= (\bar{\partial}\dot{a}, \overline{\alpha}\dot{\gamma}) + (\dot{\alpha}, \langle\bar{\partial}\dot{a}, \gamma\rangle)\\ &= (\bar{\partial}\dot{a}, \overline{\alpha}\dot{\gamma} + \overline{\dot{a}}\gamma)\\ &= 2\|\bar{\partial}\dot{a}\|^2\end{aligned}$$

compte tenu de la seconde équation de (4.3). On en déduit immédiatement $\bar{\partial}\dot{a} = 0$ et $2\bar{\partial}_A\dot{\alpha} + \dot{a}\alpha = 0$, ce qui démontre le lemme. □

On en déduit tout de suite un corollaire intéressant d'annulation.

Corollaire 4.2. *Supposons que les diviseurs $\mathit{div}\alpha$ et $\mathit{div}\overline{\gamma}$ soient disjoints, ou, plus généralement, que quand $\mathit{div}\alpha = mC + D$ et $\mathit{div}\overline{\gamma} = pC + D'$, avec C irréductible, $m, p \in \mathbb{Z}_+$, les diviseurs D et D' transverses à C, le fibré normal $\mathcal{O}_{mC}(mC)$ de mC ou celui de pC n'ait pas de section. Alors le $\mathbf{H}^1$*

du complexe de déformation est nul. Si $L^2 = K^2$, cela implique que le $\mathbf{H}^2$ *soit nul et donc que la solution soit transverse.*

Preuve. Soit un triplet $(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$ dans le noyau de $d_0^* + d_1$. Notons $f = \dot{\alpha}/\alpha = -\overline{\dot{\gamma}/\gamma}$. D'après le lemme précédent, $\dot{a} = -2\bar{\partial} f$. Si $div\alpha$ et $div\overline{\gamma}$ ne se rencontrent pas, f est clairement C^∞ sur S. Plus généralement, les équations $\bar{\partial}_A \dot{\alpha} = -\dot{a}\alpha/2$ et $\bar{\partial}\dot{a} = 0$ montrent que $\dot{\alpha} \in H^0(\mathcal{O}_{mC}(mC))$; si $\mathcal{O}_{mC}(mC)$ n'a pas de section, on déduit que $f = \dot{\alpha}/\alpha$ se prolonge au-dessus de C. Le raisonnement est le même si c'est le fibré normal à pC qui n'admet pas de section.

Finalement, la fonction f est C^∞ dans tous les cas, et la dernière équation du lemme devient

$$4\bar{\partial}^*\bar{\partial} f + (|\alpha|^2 + |\gamma|^2) f + 4\Re\langle \theta^{0,1}, \bar{\partial} f \rangle = 0 .$$

En intégrant cette équation contre f, les parties réelles et imaginaires fournissent les deux équations

$$\begin{aligned} 4\|\bar{\partial} f\|^2 + \|\alpha f\|^2 + \|\gamma f\|^2 + 4\Re(\theta^{0,1}, (\Re f)\bar{\partial} f) &= 0 , \\ \Re(\theta^{0,1}, (\Im f)\bar{\partial} f) &= 0 . \end{aligned}$$

Compte tenu de $(\theta^{0,1}, (\Im f)\bar{\partial}\Im f) = 0$ puisque $\bar{\partial}^*\theta^{0,1} = 0$, la seconde équation donne l'égalité $\Re(\theta^{0,1}, (\Im f)\bar{\partial}\Re f) = 0$, ce qui permet d'annuler le terme où θ intervient dans la première. On en déduit $f = 0$. □

Remarque 5. On remarquera que le terme en θ dans les équations du lemme 4.1 n'intervient qu'à la fin de la démonstration du corollaire, qui resterait ainsi inchangé si on remplace θ par $t\theta$ pour $t \in \mathbb{R}$ dans les formules (4.3) pour l'opérateur $d_0^* + d_1$.

Remarque 6. Compte tenu des équations du lemme 4.1, le couple $(\dot{a}, \dot{\alpha})$ donne un élément du groupe d'hypercohomologie $\mathbb{H}^1(\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M})$, qui s'identifie canoniquement à $H^0(S, \mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est le faisceau défini par suite exacte $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \to \mathcal{R} \to 0$. De même, le couple $(-\dot{a}, \dot{\overline{\gamma}})$ donne un élément de $\mathbb{H}^1(\mathcal{O} \xrightarrow{\overline{\gamma}} \mathcal{M}^{-1} \otimes K) = H^0(X, \mathcal{R}')$, avec notation évidente. La démonstration du corollaire montre qu'on a en fait des injections du $\mathbf{H}^1$ du complexe elliptique dans $\mathbb{H}^1(\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M})$ et dans $\mathbb{H}^1(\mathcal{O} \xrightarrow{\overline{\gamma}} \mathcal{M}^{-1} \otimes K)$. A partir de là, on pourrait certainement donner une description précise de ce $\mathbf{H}^1$.

5. Un exemple : les surfaces de Kodaira.

Pour une surface non kählérienne S, on a $b_2^+ = 2p_g$. Les surfaces non kählériennes à $p_g > 0$ et dimension de Kodaira nulle sont les surfaces de Kodaira [1]. Celles-ci ont un fibré canonique trivial, $K = \mathcal{O}_S$.

Théorème 5.1. *Sur une surface de Kodaira, la seule classe basique est $K = \mathcal{O}_S$, qui a un invariant de Seiberg-Witten égal à* 1.

Remarque 7. Comme corollaire immédiat, on obtient qu'une surface de Kodaira n'admet pas de métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive. D'autre part, on aurait pu déduire ce théorème des résultats de Taubes [18, 19], puisque ces surfaces sont munies de la structure symplectique de Kodaira-Thurston [13, 21].

Preuve. Considérons le cas de la structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ fournie par $L = K^{-1} \otimes M^2 = M^2$. Perturbons les équations par une 2-forme autoduale harmonique $\varepsilon = \varepsilon^{0,2} + \varepsilon^{2,0}$, et raisonnons sur le système du lemme 2.1. Les solutions sont fournies par une structure holomorphe $\mathcal{L}$ sur L et des sections $\alpha \in H^0((K \otimes \mathcal{L})^{1/2})$ et $\gamma \in H^2((K \otimes \mathcal{L})^{1/2}) = H^0((K \otimes \mathcal{L}^{-1})^{1/2})^*$. Puisque

$K = \mathcal{O}_S$, les fibrés $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-1}$ doivent avoir des sections, donc $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S$ (M est trivial). Il y a donc une unique solution, qui est transverse par le corollaire 4.2. Reste à déterminer son signe : en anticipant sur la suite, et en utilisant les conventions de la section 7 pour l'orientation, on voit qu'il est positif par le lemme 7.1. □

6. Perturbation du fibré canonique.

Revenons au cas général. Le diviseur canonique, comme diviseur effectif, s'écrit $K = \sum m_i C_i$, avec $m_i \in \mathbb{Z}_+$ et C_i irréductible. Une solution des équations donne un fibré holomorphe $\mathcal{M}$, qui, comme diviseur effectif, doit s'écrire $\mathcal{M} = \sum p_i C_i$, avec $0 \leq p_i \leq m_i$. Le corollaire 4.2 dit que cette solution est transverse si $p_i = 0$ ou m_i, ou si le fibré normal de $p_i C_i$ ou celui de $(m_i - p_i)C_i$ n'a pas de section.

En particulier, si le fibré normal de C_i est trivial et $m_i > 1$, on ne peut pas conclure. Nous allons alors perturber K, comme diviseur effectif, de sorte de remplacer $m_i C_i$ par m_i composantes irréductibles disjointes. Cela permettra de calculer la multiplicité des solutions.

Nous pouvons exprimer cette perturbation en choisissant $\varrho \in H^1(S, \mathcal{O}_S)$, représenté par une (0,1)-forme harmonique ($\bar\partial\varrho = 0$ et $\bar\partial^*\varrho = 0$), et $\eta^{2,0} \in \Lambda^{2,0}$, tels que $(\bar\partial - \varrho)\eta^{2,0} = 0$, ce qui est équivalent à $(\bar\partial + \varrho)^*\overline{\eta^{2,0}} = 0$. La (2,0)-forme $\eta^{2,0}$ est donc une section holomorphe du fibré K_ϱ, topologiquement isomorphe à K mais muni de la structure holomorphe $\bar\partial^K - \varrho$. Si (ϱ, η) est proche de $(0, \varepsilon)$, le fibré est proche de K.

Notons $\eta = \eta^{2,0} + \overline{\eta^{2,0}}$, et considérons la modification suivante du système d'équations (1.3).

$$\begin{cases} (\bar\partial_A + \bar\partial_A^*)\psi - \frac{\varrho + \bar\varrho}{2} \cdot \psi = 0\,, \\ iF_A^+ = \sigma(\psi) + \eta\,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Ce système se réécrit bien entendu comme

$$(\bar\partial_A - \frac{\varrho}{2})\alpha + (\bar\partial_A + \frac{\varrho}{2})^*\gamma = 0\,, \tag{6.2}$$

$$F_A^{0,2} - \frac{\overline{\alpha}\gamma}{2} + i\eta^{0,2} = 0\,, \tag{6.3}$$

$$\Lambda F_A - \frac{i}{2}(|\alpha|^2 - |\gamma|^2) = 0\,. \tag{6.4}$$

Pour une telle équation, on ne peut pas avoir un découplage entre α et γ en général comme dans le lemme 2.1. Cependant, on a le résultat suivant.

Lemme 6.1. *Supposons que* (ϱ, η) *soit suffisamment proche de* $(0, \varepsilon)$. *Alors les solutions du système ci-dessus vérifient*

$$F_A^{0,2} = \frac{\overline{\alpha}\gamma}{2} - i\eta^{0,2} = 0\,,$$
$$(\bar\partial_A - \frac{\varrho}{2})\alpha = 0\,, \qquad (\bar\partial_A + \frac{\varrho}{2})^*\gamma = 0\,.$$

Cela signifie que L *a une structure holomorphe* $\mathcal{L}$ *et que* α *et* γ *sont holomorphes, ou plus précisément* $\alpha \in H^0((\mathcal{L} \otimes K_\varrho)^{1/2})$ *et* $\overline{\gamma} \in H^0((\mathcal{L}^{-1} \otimes K_\varrho)^{1/2})$.

De plus, étant donnée une solution (A, α, γ) *de ces équations, il existe une transformation de jauge complexe, unique à transformation de jauge unitaire près, qui envoie cette solution sur une solution de l'équation* (6.4).

Preuve. En utilisant la compacité (lemme 1.1), on peut supposer, pour (ϱ, η) suffisamment proche de $(0, \varepsilon)$, que la solution (A, α, γ) est aussi proche que l'on veut (dans une norme $C^{k,\nu}$) d'une solution $(A_0, \alpha_0, \gamma_0)$ aux équations pour le couple $(0, \varepsilon)$. Écrivons $A^{0,1} = A_0^{0,1} + a$. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\Big((\bar\partial_A - \frac{\varrho}{2})\alpha, (\bar\partial_A + \frac{\varrho}{2})^*\gamma\Big) &= (\frac{1}{2}F_A^{0,2}\alpha, \gamma) - (\frac{\varrho\alpha}{2}, \bar\partial_A^*\gamma) + (\bar\partial_A\alpha, \frac{\iota(\overline{\varrho})\gamma}{2}) \\
&= (\bar\partial a, \frac{\overline{\alpha}\gamma}{2}) - (\varrho\alpha, \bar\partial_A^*\gamma) \\
&= \|\bar\partial a\|^2 + (\bar\partial a, i\eta^{0,2}) - (\varrho\alpha, \bar\partial_{A_0}^*\gamma + \frac{\iota(\overline{a})\gamma}{2}) \\
&= \|\bar\partial a\|^2 + (\varrho \wedge a, \bar\partial a) - (\varrho\alpha, \bar\partial_{A_0}^*\gamma)\,,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne s'obtient en utilisant $(\bar\partial + \varrho)^*\eta^{0,2} = 0$. Comme $\bar\partial^* a$ est petit (en norme $C^{k-1,\nu}$), en faisant agir le groupe de jauge complexe (ce qui préserve les équations (6.2) et (6.3) mais pas (6.4), dont nous n'avons plus besoin), on peut s'arranger pour que $\bar\partial^* a = 0$ et donc $(\varrho \wedge a, \bar\partial a) = 0$, tout en gardant (A, α, γ) proche (en norme $C^{k,\nu}$) de $(A_0, \alpha_0, \gamma_0)$. On en déduit (6.5)

$$\left\|(\bar\partial_A - \frac{\varrho}{2})\alpha\right\|^2 + \left\|(\bar\partial_A + \frac{\varrho}{2})^*\gamma\right\|^2 + 2\|\bar\partial a\|^2 - 2\Re(\varrho\alpha, \bar\partial^*_{A_0}\gamma) = 0\,.$$

Il nous faut analyser ce dernier terme. Comme $(\varrho\alpha, \bar\partial^*_{A_0}\gamma) = -(\varrho \wedge \bar\partial_{A_0}\alpha, \gamma)$, on voit que $(\varrho\alpha, \bar\partial^*_{A_0}\gamma) = (\varrho\alpha', \bar\partial^*_{A_0}\gamma')$, où α' et γ' sont les projections de α et γ sur $(\ker \bar\partial_{A_0})^\perp$ et $(\ker \bar\partial^*_{A_0})^\perp$, respectivement. L'opérateur à symbole injectif $\bar\partial_{A_0}$ étant injectif sur $(\ker \bar\partial_{A_0})^\perp$, il en est de même pour la perturbation $\bar\partial_A - \varrho/2$, si a et ϱ sont assez petits ; sous les hypothèses du lemme, on a donc $\|\alpha'\|^2 \le c\|(\bar\partial_A - \varrho/2)\alpha\|^2$, et de même $\|\bar\partial^*_{A_0}\gamma'\|^2 \le c\|(\bar\partial + \varrho/2)^*\gamma\|^2$. Nous en déduisons

$$2|(\varrho\alpha, \bar\partial^*_{A_0}\gamma)| \le c \sup|\varrho| \left(\|(\bar\partial_A - \varrho/2)\alpha\|^2 + \|(\bar\partial + \varrho/2)^*\gamma\|^2\right).$$

Si $\sup|\varrho|$ est assez petit, on déduit alors de l'équation (6.5) les annulations $\bar\partial a = 0$, $(\bar\partial_A - \varrho/2)\alpha = 0$ et $(\bar\partial + \varrho/2)^*\gamma = 0$.

Enfin, la dernière assertion du lemme provient du lemme 3.1 et de la remarque 3. □

Remarque 8. Par le lemme 1.1, les solutions de ces équations peuvent servir aussi bien à calculer les invariants de Seiberg-Witten. De plus, il n'est pas difficile, par des arguments similaires à ceux employés dans la démonstration ci-dessus, de voir que le lemme 4.1 et le corollaire 4.2 restent valables pour ces solutions.

7. Orientation et signe des solutions.

Orienter l'espace des modules est équivalent à choisir une orientation de $D = H^0(S,\mathbb{R}) \oplus H^1(S,\mathbb{R}) \oplus H^2_+(S,\mathbb{R})$. Dans le cas kählérien, cette orientation provient de l'identification avec l'espace vectoriel complexe $\sum H^{0,i}(S)$, par

$$(a_0, a_1, a_2) \longrightarrow (a_0 + i\Lambda a_2, a_1^{0,1}, a_2^{0,2}) .$$

Dans le cas non kählérien ($b_1(S)$ impair), notons θ^h la partie harmonique de θ—sa classe de cohomologie est toujours non triviale, alors que celle de $J\theta = -C\theta = d^*\omega$ l'est manifestement. Nous orientons D en orientant $D \oplus \mathbb{R}J\theta^h \oplus \mathbb{R}\omega$, dont l'orientation provient de l'isomorphisme avec $\sum H^{0,i}(S)$, donné par

$$(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) \longrightarrow (a_0 + i\Lambda b_2, a_1^{0,1} + b_1^{0,1}, a_2^{0,2}) .$$

En fait, dans la suite, nous utiliserons directement le complexe du $\bar\partial$, avec sa structure complexe, pour calculer l'orientation. Le résultat qui suit justifie une assertion de Witten [22, équation (4.23)].

Lemme 7.1. *Soit une solution des équations du lemme* 6.1. *Si* $L^2 = K^2$ *et sous les hypothèses du corollaire* 4.2 *(de sorte que la solution est transverse), le signe de la contribution à l'invariant de Seiberg-Witten est*

$$(-1)^{\dim H^0(X,\mathcal{R})} ,$$

où $\mathcal{R}$ *est le faisceau défini par la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} (K_\varrho \otimes \mathcal{L})^{1/2} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow 0 .$$

Preuve. Il nous faut calculer le signe du déterminant de l'opérateur $d_0^* + d_1$ calculé en (4.3). Compte tenu de la remarque 5, on peut déformer vers 0 le terme faisant intervenir θ sans modifier le signe du déterminant et on notera P l'opérateur obtenu en le supprimant ; l'opérateur P se décompose en $P = P_+ + P_-$, où P_+ préserve l'orientation complexe et P_- la renverse, avec

$$P_-(\dot a, \dot\alpha, \dot\gamma) = \left(-\overline{\langle \gamma, \dot\gamma \rangle}, \frac{-\bar{\dot a}\gamma}{2}, \frac{\iota(\bar{\dot a})\gamma}{2} \right) .$$

L'opérateur P_- est d'ordre 0, tandis que l'opérateur P_+ est elliptique d'ordre 1, d'indice nul puisque l'espace des modules des solutions est de dimension 0. Pour $t > 0$, l'opérateur $P_+ + tP_-$ est (au terme en θ près) l'opérateur $d_0^* + d_1$ du complexe de déformation à la solution $(\alpha, t\gamma)$ des équations (6.2) à (6.4), à la différence que η est remplacé par $t\eta$ et l'équation (6.4) par

$$\Lambda F_A - \frac{i}{2}\left(|\alpha|^2 - \frac{1}{t^2}|\gamma|^2\right) = 0\,.$$

Ce changement laisse insensibles le lemme 4.1 et le corollaire 4.2, si bien que $P_+ + tP_-$ reste un isomorphisme pour $t > 0$. On déduit que pour $t \geq 0$, l'opérateur $P_+ + tP_-$ n'a pas de noyau dans $E^\perp$, où $E = \ker P_+$, donc le signe du déterminant de P n'est autre que celui de $P_+|_{E^\perp} \oplus P_-|_E$, c'est-à-dire $(-1)^{\dim E}$.

Il nous reste donc à déterminer $E = \ker P_+$. Le lemme 4.1 demeure valable à la limite $t \to 0$, c'est-à-dire $\gamma \to 0$, et donne que $(\dot{a}, \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) \in E$ si et seulement si $\dot{\gamma} = 0$ et

$$-2\bar{\partial}^* \dot{a} + \langle \alpha, \dot{\alpha} \rangle = 0\,,$$
$$\bar{\partial}\dot{a} = 0\,, \qquad (\bar{\partial}_A - \frac{\varrho}{2})\dot{\alpha} + \frac{\dot{a}\alpha}{2} = 0\,;$$

nous reconnaissons les représentants harmoniques du groupe $\mathbb{H}^1(\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} (K_\varrho \otimes \mathcal{L})^{1/2})$, qui s'identifie canoniquement à $H^0(X, \mathcal{R})$. □

Remarque 9. L'argument ci-avant diffère de celui de Witten, qui proposait de déformer les solutions en remplaçant ε par $t\varepsilon$, où $0 < t < 1$, sans modifier l'équation sur ΛF. Suivant le signe de $\deg_\omega L$, on converge vers une solution avec $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$ et on raisonne en analysant la perturbation au voisinage de cette solution. Mais ici il est possible que la limite soit une solution réductible ($\alpha = 0$ et $\gamma = 0$) et cette approche devient difficile.

8. Le cas des surfaces elliptiques.

Nous sommes maintenant prêts à calculer les invariants des surfaces elliptiques. La classification des surfaces à dimension de Kodaira égale à un se réduit à ces surfaces. Notre méthode donnera aussi une nouvelle démonstration, plus simple nous semble-t-il, du cas kählérien.

Soit $S \to C$ une surface elliptique (relativement) minimale au-dessus d'une courbe de genre g. Fixons une section du fibré canonique, $\varepsilon^{2,0} \in H^0(K)$, de sorte que, comme diviseur [1, (12.1)],

$$K = \sum_{1}^{\chi(\mathcal{O}_S)+2g-2} C_j + \sum (m_i - 1) F_i ,$$

où les F_i sont les fibres multiples (de multiplicité m_i) et les C_j sont des fibres générales. Quitte à perturber K en un diviseur proche K_ϱ, avec une section $\eta^{2,0}$ proche de $\varepsilon^{2,0}$, on peut supposer que les fibres C_j sont distinctes, lisses et disjointes des fibres multiples.

Nous allons calculer les classes basiques et l'invariant par la méthode préconisée par Witten [22, équation (4.17) et suivantes]. Par la remarque 2, les classes basiques sont de type (1,1), et d'après le lemme 6.1, les seules solutions des équations, convenablement perturbées, sont fournies par une décomposition de K_ϱ, comme diviseur effectif, en $K_\varrho = (K_\varrho + \mathcal{L})/2 + (K_\varrho - \mathcal{L})/2$; les $\mathcal{M} = (K_\varrho \otimes \mathcal{L})^{1/2}$ sont donc du type

$$\mathcal{M} = \sum_{J \subset \{1,\ldots,\chi(\mathcal{O}_S)+2g-2\}} C_j + \sum a_i F_i ,$$

où $0 \leq a_i < m_i$ (si les F_i ne sont pas irréductibles, on pourrait imaginer de ne prendre que certaines composantes, mais, par le lemme de Zariski [1, lemme (8.2)], cela impliquerait $L^2 < K^2$, donc la dimension virtuelle serait négative et l'invariant de Seiberg-Witten nul) ; il est alors clair que $L^2 = K^2$ donc l'espace des modules est de dimension 0 ; comme F_i a un fibré normal de torsion, d'ordre m_i, et que les autres composantes sont sans multiplicité, le corollaire 4.2 (et la remarque 8) impliquent que toutes les solutions sont transverses. Comme le fibré normal d'une fibre générique est trivial, la contribution à l'invariant d'une telle solution, d'après le lemme 7.1, est $(-1)^{|J|}$.

Dans la suite, il sera commode d'identifier $H_2(S,\mathbb{Z})$ avec $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Plaçons-nous dans le cas kählérien, ce qui est équivalent [12] à dire que la fibre générale f n'est pas de torsion dans $H_2(S,\mathbb{Z})$, et posons $c_1((K+L)/2) =$

$df + \sum a_i F_i$, alors $|J| = d$ et il y a $\binom{\chi(\mathcal{O}_S)+2g-2}{d}$ manières de choisir J. On en déduit que l'invariant de Seiberg-Witten vaut

$$(-1)^d \binom{\chi(\mathcal{O}_S)+2g-2}{d}.$$

On retrouve ainsi le calcul de Brussee [4] et de Friedman et Morgan [8].

Examinons à présent le cas non kählérien, ce qui est équivalent à dire que la fibre générale f est une classe de torsion de $H_2(S, \mathbb{Z})$, d'ordre $e \in \mathbb{Z}_+$. On a alors toujours $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$. En écrivant toujours $c_1((K+L)/2) = df + \sum a_i F_i$, avec $0 \leq d < e$, la méthode précédente s'applique, à la différence que $|J|$ est maintenant défini seulement modulo e, donc l'invariant est

$$\sum_{j \equiv d \pmod e, 0 \leq j \leq 2g-2} (-1)^j \binom{2g-2}{j}.$$

Cependant, ce raisonnement n'est pas correct, car ici, les a_i, et la valeur de d modulo e, ne sont pas fixés par $c_1((K+L)/2) \in H_2(S, \mathbb{Z})$ et on doit donc faire encore une somme sur les choix possibles. Cela démontre finalement le théorème suivant. Nous ne l'énonçons que dans le cadre non kählérien, mais le cas kählérien correspond à faire $e = +\infty$.

Théorème 8.1. *Soit $S \to C$ une surface elliptique relativement minimale, non kählérienne, au-dessus d'une courbe C de genre g, de fibre générale f, avec fibres multiples F_i, de multiplicités m_i. On suppose $p_g(S) \neq 0$, c'est-à-dire $g > 0$, et on note e l'ordre de f dans $H_2(S, \mathbb{Z})$. Notons $x_d(M)$ le nombre de manières d'écrire $c_1(M) = df + \sum a_i F_i$ dans $H_2(S, \mathbb{Z})$, avec $0 \leq a_i < m_i$. Alors, l'invariant de Seiberg-Witten de la structure* Spin$^{\mathbb{C}}$ *induite par $M = (K+L)/2$ est*

$$sw(M) = \sum_{0 \leq d < e} x_d(M) \sum_{j \equiv d \pmod e, 0 \leq j \leq 2g-2} (-1)^j \binom{2g-2}{j}.$$

La surface S est de type simple et ses classes basiques sont exactement les M ci-dessus, dont l'invariant est non nul.

Remarque 10. Quand les invariants de S ne sont pas tous nuls, on déduit que S ne peut admettre de métrique riemannienne à courbure scalaire strictement positive. Cela reste vrai pour les éclatements de S (voir la démonstration du théorème 8.2). Il semble plausible que ces invariants ne s'annulent tous que quand $e = 1$ et $g > 1$ (voir les exemples ci-dessous).

Le théorème inclut l'exemple déjà vu des surfaces de Kodaira (cas $g = 1$ sans fibre multiple). Un autre cas évident est le suivant.

Exemple 1. Si $e = 1$ et $g > 1$, les invariants sont toujours nuls ; si $e = 1$ et $g = 1$, alors $sw(M) = x_0(M) = \# \ker(\oplus_i \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} F_i \to H_2(S, \mathbb{Z}))$.

Pour mieux saisir la portée du théorème, il faut comprendre les nombres x_d, ce qui est un problème topologique très concret. Pour le faire sentir, rappelons la construction C^∞ de ces surfaces. Par [6, chapitre II, section 7] (voir en particulier le théorème 7.8), une telle surface, S, s'obtient à partir d'un produit $C \times E$, où $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$, en faisant des transformations logarithmiques sur des relevés $z_i \in \mathbb{C}$ de points $\xi_i \in E$ d'ordre m_i. La surface S est non kählérienne [6, II, théorème 7.7] si et seulement si $\sum_i z_i \neq 0$. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris pour calculer l'homologie des recollements, on voit que $H_2(S, \mathbb{Z})$ est engendré par $H_1(C) \otimes H_1(E)$, la fibre générale f et les fibres multiples F_i, avec les relations $m_i F_i = f$ et $\sum_i (m_i z_i) F_i = 0$ (cette égalité signifie $\sum_i (m_i \Re z_i) F_i = 0$ et $\sum_i (m_i \Im z_i) F_i = 0$).

Exemple 2. Dans la situation ci-dessus, s'il y a une seule fibre multiple, et si $m_1 z_1 = a_1 \in \mathbb{Z}_+$, avec a_1 et m_1 premiers entre eux, alors $H_2(S, \mathbb{Z}) = H_1(C) \otimes H_1(E) \oplus \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}$, avec F_1 générateur du $\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}$, de même que $f = m_1 F_1$, qui est donc d'ordre $e = a_1$. Regardons le cas où $e = 2$, de sorte que $M = 0$ ou 1 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: on calcule $x_0(0) = x_1(1) = (m_1+1)/2$ et $x_0(1) = x_1(0) = (m_1-1)/2$; si $g > 1$, on obtient $sw(0) = 2^{2g-3}$ et $sw(1) = -2^{2g-3}$, tandis que si $g = 1$, on obtient $sw(0) = (m_1+1)/2$ et $sw(1) = (m_1-1)/2$.

Exemple 3. Toujours dans la situation ci-dessus, avec une seule fibre multiple, mais $m_1 = a_1 - 1 = e - 1$, on calcule $x_d(nF_1) = 1$ si $d+n \neq e-1$ et 0 si $d+n = e-1$; on déduit la formule, si $g > 1$,

$$sw(nF_1) = -\sum_{j\equiv e-1-n \pmod e) 0\leq j\leq 2g-2} (-1)^j \binom{2g-2}{j},$$

donc les invariants ne sont pas triviaux.

Dans les trois exemples ci-dessus, on voit des cas où les invariants ne peuvent pas prendre la valeur ± 1. Par [18], on déduit que les variétés correspondantes ne sauraient admettre de structure symplectique. En s'appuyant sur [19], on obtient le théorème général suivant.

Théorème 8.2. *Une surface proprement elliptique à b_1 impair n'admet pas de structure symplectique.*

Preuve. Utilisons les résultats de Taubes [19] (voir aussi [20, (2.3)] qui est plus précis) sur la structure des invariants de Seiberg-Witten sur une variété symplectique. Si S admet une forme symplectique ϖ, soit K_ϖ le fibré canonique associé. Pour la structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ standard, l'invariant est ± 1. Si on considère une structure $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ donnée par un fibré N, de sorte que $W^+ = N \oplus (K_\varpi^{-1} \otimes N)$ et $L = K_\varpi^{-1} \otimes N^2$, pour laquelle l'invariant de Seiberg-Witten est non nul, alors

$$0 \leq [\varpi] \cdot c_1(N) \leq [\varpi] \cdot c_1(K_\varpi), \tag{8.1}$$

avec égalité à gauche si et seulement si $N = 0$ et à droite si et seulement si $N = K_\varpi$.

Si S est une surface elliptique à b_1 impair, relativement minimale, on a vu que les L fournissant des classes basiques s'écrivent (avec les notations du théorème 8.1) $df + \sum_i a_i F_i$, donc sont des classes de torsion. Cela implique que $[\varpi] \cdot c_1(L) = 0$ pour tout ϖ. Si S est symplectique, on a donc égalité partout dans (8.1), ce qui impose $N = 0$ et $K_\varpi = 0$. Il ne peut donc y avoir qu'une seule classe basique, avec $L = 0$.

En particulier, nous déduisons que la somme des invariants sur toutes les classes basiques doit être ± 1. Or, le théorème 8.1 permet de calculer cette somme. On obtient

$$\sum_{M \text{ basique}} sw(M) = \left(\prod m_i\right) \sum_{0 \leq d \leq 2g-2} (-1)^d \binom{2g-2}{d}.$$

Si $g > 1$, cela est toujours nul. Si $g = 1$, cela ne peut être égal à ± 1 que si tous les m_i sont égaux à 1, c'est-à-dire s'il n'y a pas de fibre multiple : cela ne se produit que pour les surfaces de Kodaira, qui sont exclues par les hypothèses du théorème, puisque leur dimension de Kodaira est nulle. On déduit que S ne saurait être symplectique.

Dans le cas non minimal, soit $\sigma : \tilde{S} \to S$ l'éclaté de S en n points, avec courbes exceptionnelles $E_1, \ldots, E_n$. Les classes basiques sur $\tilde{S}$ sont les classes $\sigma^* L_S + \sum \epsilon_i E_i$, où L_S est une classe basique sur S, et $sw_{\tilde{S}}(\sigma^* L_S + \sum \epsilon_i E_i) = sw_S(L_S)$, avec $\epsilon_i = \pm 1$ car S est de type simple (ces résultats sont bien connus, mais ils découlent aussi directement, dans ce cas, de la description des classes basiques à partir des décompositions du diviseur canonique comme diviseur effectif). Si $\tilde{S}$ est symplectique, alors son fibré canonique K_ϖ est une classe basique, donc il existe L_0 classe basique sur S et $\epsilon_i = \pm 1$ tels que $K_\varpi = \sigma^* L_0 + \sum \epsilon_i E_i$; si $L_0 \otimes N_0^2$ est basique sur S, posons $N = \sigma^* N_0$, alors $K_\varpi \otimes N^2$ est basique sur $\tilde{S}$; mais $N = \sigma^* N_0$ est de torsion, donc il y a égalité dans (8.1), ce qui implique $N = 0$ et $N_0 = 0$. Ainsi, il n'y a sur S qu'une seule classe basique, d'invariant $sw_S(L_0) = sw_{\tilde{S}}(K_\varpi) = \pm 1$, et on est ramené à l'argument employé dans le cas minimal. □

Références.

[1] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag (1984).

[2] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag (1992).

[3] S. Bradlow, *Vortices for holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. **135** (1990) 1–17.

[4] R. Brussee, *The canonical class and the C^∞ properties of Kähler surfaces*, New York J. Math. **2** (1996) 103–146.

[5] N.P. Buchdahl, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann. **280** (1988) 625–648.

[6] R. Friedman and J.W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Springer-Verlag (1994).

[7] R. Friedman and J.W. Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants*, J. Algebraic Geom. **6** (1997) 445–479.

[8] R. Friedman and J.W. Morgan, *Obstruction bundles, semiregularity, and Seiberg-Witten invariants*, Comm. Anal. Geom. (to appear).

[9] O. García-Prada, *Invariant connections and vortices*, Comm. Math. Phys. **156** (1993) 527–546.

[10] P. Gauduchon, *Le théorème de l'excentricité nulle*, C. R. Acad. Sci. Paris **285** (1977) 387–390.

[11] P. Gauduchon, *Hermitian connections and Dirac operators*, Boll. Un. Mat. Ital. **7** (1997) 11-8, Suppl. Jasc. 2, 257-288.

[12] R. Harvey and H.B.Lawson, Jr. , *An intrinsic characterization of Kähler manifolds*, Invent. Math. **74** (1983) 169–198.

[13] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces, I.*, Amer. J. Math. **86** (1964) 751–798.

[14] D. Kotschick, J.W. Morgan and C.H. Taubes, *Four-manifolds without symplectic structures but with nontrivial Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995) 119–124.

[15] P.B. Kronheimer and T.S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 797–808.

[16] C. Okonek and A. Teleman, *Les invariants de Seiberg-Witten et la conjecture de Van de Ven*, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995) 457–461.

[17] C. Okonek and A. Teleman, *The coupled Seiberg-Witten equations, vortices, and moduli spaces of stable pairs*, Internat. J. Math. **6** (1995) 893–910.

[18] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 809–822.

[19] C.H. Taubes, *More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995) 9–13.

[20] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995) 221–238.

[21] W. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976) 467–468.

[22] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 769–796.

RECEIVED SEPTEMBER 10, 1996.

CMAT, URA 169 DU CNRS,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
91128 PALAISEAU CEDEX,

FRANCE

E-MAIL: BIQUARD@MATH.POLYTECHNIQUE.FR